Total No. of printed pages = 12

3(Sem 6) MATH 2

2015

MATHEMATICS

(General)

Theory Paper : E-6.4

(Advance Calculus)

Full Marks – 80

Time – Three hours

The figures in the margin indicate full marks for the questions.

Answer either in English or in Assamese.

1. Answer the following questions : 1×10=10

তলত দিয়া প্ৰশ্নবোৰৰ উত্তৰ লিখা ঃ

(a) Define a metric space.

এটা দূৰিক স্থানৰ সংজ্ঞা দিয়া।

[Turn over

(b) Consider the usual metric on [0, 1] and describe the open sphere $S\left(\frac{1}{2}, 1\right)$.

[0, 1] অন্তৰালত সংজ্ঞাকৃত সাধাৰণ দূৰিকৰ বাবে মুক্ত গোলক $S\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ বৰ্ণনা কৰা।

(c) Define a complete metric space.

পূৰ্ণ দূৰিক স্থানৰ সংজ্ঞা দিয়া।

(d) What is upper Riemann integral of a function f over [a, b] ?

[a, b] অন্তৰালত f ফলনৰ উচ্চ ৰাইমেন অনুকল কি ?

(e) If f, g are bounded and integrable functions on [a, b] such that $f \geq g$, then what is the relation between $\int_a^b f(x)\,dx$ and $\int_a^b g(x)\,dx$?

[a, b] অন্তৰালত f, g ফলন দুটা সীমিত আৰু অনুকলনীয় যাতে $f \geq g$, তেন্তে $\int_a^b f(x)\,dx$ আৰু $\int_a^b g(x)\,dx$ ৰ মাজৰ সম্পৰ্ক কি ?

(f) A function f is bounded and integrable on [a, b] and another function F exists such that $F' = f$ on [a, b]. Then write the value of $\int_a^b f(x)\,dx$.

[a, b] অন্তৰালত f এটা সীমিত আৰু অনুকলনীয় ফলন আৰু [a, b] অন্তৰালত আন এটা ফলন F পোৱা যায় যাতে $F' = f$। তেন্তে $\int_a^b f(x)\,dx$ ৰ মান লিখা।

(g) If n is a positive integer, write down the value of $\lceil n$.

n এটা ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা হ'লে, $\lceil n$ ৰ মান লিখা।

(h) For what values of n, the integral $\int_a^\infty \frac{dx}{x^n}$ is convergent ?

nৰ কি মানৰ বাবে $\int_a^\infty \frac{dx}{x^n}$ অনুকলটো অভিসাৰী ?

(i) Express $\int_0^{\pi/2} \sin^p\theta \cos^q\theta \, d\theta$ in terms of Gamma function.

$\int_0^{\pi/2} \sin^p\theta \cos^q\theta \, d\theta$ ক গামা ফলনত প্ৰকাশ কৰা।

(j) Express $\iint_R F(x,y)\,dxdy$ in polar co-ordinates.

$\iint_R F(x,y)\,dxdy$ ক ধ্ৰুৱীয় স্থানাংক প্ৰণালীত প্ৰকাশ কৰা।

2. Answer the following questions : 2×5=10

তলত দিয়া প্ৰশ্নবোৰৰ উত্তৰ কৰা ঃ

(a) The function $d : R \times R \rightarrow R$ is defined by $d(x, y) = |x - y| \ \forall \ x, y \in R$.

Show that d is a metric for R, the set of real numbers.

$d : R \times R \rightarrow R$ ফলনটো $d(x, y) = |x - y| \ \forall \ x, y \in R$ৰে সংজ্ঞাকৃত কৰা হৈছে। দেখুওৱা যে d ফলনটো বাস্তৱ সংখ্যাৰ সংহতি Rত এটা দূৰিক।

(b) Show that the function f defined by

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{when } x \text{ is rational} \\ 1, & \text{when } x \text{ is irrational} \end{cases}$$

is not R-integrable on any interval.

f ফলনটো তলত দিয়া ধৰণে সংজ্ঞাকৃত কৰা হৈছে।

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{যেতিয়া } x \text{ এটা পৰিমেয় সংখ্যা} \\ 1, & \text{যেতিয়া } x \text{ এটা অপৰিমেয় সংখ্যা} \end{cases}$$

দেখুওৱা যে কোনো অন্তৰালতেই f ফলনটো R-অনুকলনীয় নহয়।

(c) Show that the constant function K is R-integrable and $\int_a^b K\,dx = K(b - a)$.

দেখুওৱা যে এটা ধ্ৰুৱক ফলন K, R-অনুকলনীয় আৰু $\int_a^b K\,dx = K(b - a)$।

(d) Show that $\int_0^1 \frac{dx}{x^2}$ is divergent.

দেখুওৱা যে $\int_0^1 \frac{dx}{x^2}$ অপসাৰী।

(e) Evaluate (মান নিৰ্ণয় কৰা) ঃ

$$\int_0^1 \int_0^1 (x + y)\,dx\,dy$$

3. Answer any *four* parts : 5×4=20

যি কোনো চাৰিটা অংশৰ উত্তৰ কৰা ঃ

(a) Prove that every open sphere is an open set in a metric space.

প্ৰমাণ কৰা যে এটা দূৰিক স্থানত প্ৰতিটো মুক্ত গোলকেই একোটা মুক্ত সংহতি।

(b) Prove that every convergent sequence in a metric space is a Cauchy sequence.

প্ৰমাণ কৰা যে এটা দূৰিক স্থানত প্ৰতিটো অভিসাৰী অনুক্ৰমেই একোটা ক'শ্বি অনুক্ৰম।

(c) Prove that the necessary and sufficient condition for the Riemann integrability of a bounded function f is that to every $\in > 0$, there exists a $\delta > 0$ such that for every partition P of [a, b] with $\|P\| < \delta$, $U(P, f) - L(P, f) < \in$.

প্ৰমাণ কৰা যে এটা সীমিত ফলন f ৰাইমেন অনুকলনীয় হোৱাৰ প্ৰয়োজনীয় আৰু পৰ্যাপ্ত চৰ্ত হ'ল এটা পূৰ্ব নিৰ্দ্ধাৰিত $\in > 0$ ৰ বাবে এটা $\delta > 0$ পোৱা যায় যাতে [a, b] অন্তৰালৰ প্ৰতিটো বিভাজন Pৰ বাবে $U(P, f) - L(P, f) < \in$ য'ত $\|P\| < \delta$.

(d) Prove that every continuous function is R-integrable.

প্ৰমাণ কৰা যে প্ৰতিটো অবিচ্ছিন্ন ফলনেই R-অনুকলনীয়।

(e) Prove that (প্ৰমাণ কৰা যে)

$$2^n \left\lceil \left(n + \frac{1}{2}\right) = 1, 3, 5, ... (2n - 1) \sqrt{\pi}$$

(f) Evaluate (মান নিৰ্ণয় কৰা)

$$\int_0^1 \int_0^{1-y^2} \left[(x-1)^2 + y^2\right] dx\, dy.$$

4. Answer either (a) and (b) or (c) and (d) : 5+5=10

(a) আৰু (b) নাইবা (c) আৰু (d) অংশৰ উত্তৰ কৰা ঃ

(a) The function $d : c \times c \to R$ is defined by $d(z_1, z_2) = |z_1 - z_2| \;\forall z_1, z_2 \in C$ where C and R are the sets of complex and real numbers. Show that d is a metric on C.

$d : c \times c \to R$ ফলনটো তলত দিয়া ধৰণে সংজ্ঞাকৃত কৰা হৈছে য'ত C আৰু R ক্ৰমে জটিল আৰু বাস্তৱ সংখ্যাৰ সংহতি। $d(z_1, z_2) = |z_1 - z_2| \;\forall z_1, z_2 \in C$. দেখুওৱা যে C সংহতিত d এটা দূৰিক।

(b) Prove that a subset of a metric space is open if and only if it is union of a family of open spheres.

প্ৰমাণ কৰা যে এটা দূৰিক স্থানৰ এটা উপসংহতি এটা মুক্ত সংহতি হব যদি আৰু যদিহে উপসংহতিটো এটা মুক্ত গোলকৰ পৰিয়ালৰ মিলন হয়।

(c) Let $\{(x_i, d_i) : i = 1, 2, 3, ..., n\}$ be a finite class of metric spaces. Show that the function d defined as follows is a metric on the Cartesian product $x_1 \times x_2 \times x_3 \times .... \times x_n$,

$$d(x_1, x_2, ..., x_n), (y_1, y_2, ...,y_n) = \sum_{i=1}^{n} d_i (x_i, y_i).$$

ধৰা হ'ল $\{(x_i, d_i) : i = 1, 2, 3, ..., n\}$ এটা সীমিত সংখ্যক দূৰিকৰ স্থানৰ সংগ্ৰহ। দেখুওৱা যে তলত দিয়া ধৰণে সংজ্ঞাকৃত d ফলনটো কাৰ্টীয় পূৰণফল $x_1 \times x_2 \times x_3 \times .... \times x_n$ ত এটা দূৰিক।

$$d(x_1, x_2, ..., x_n), (y_1, y_2, ...,y_n) = \sum_{i=1}^{n} d_i (x_i, y_i)$$

(d) Prove that in a metric space, the intersection of an arbitrary family of closed sets is closed.

এটা দূৰিক স্থানত যি কোনো সংখ্যক বন্ধ সংহতিৰ ছেদন এটা বন্ধ সংহতি বুলি প্ৰমাণ কৰা।

5. Answer either (a) and (b) or (c) and (d) : 5+5=10

(a) আৰু (b) নাইবা (c) আৰু (d) অংশৰ উত্তৰ কৰা ঃ

(a) Let f be a continuous function defined on [a, b] and $f \in R$ [a, b]. Prove that for some $c \in [a, b]$, $\int_a^b f(x)\,dx = (b - a) f(c)$.

ধৰা হ'ল [a, b] অন্তৰালত f এটা অবিচ্ছিন্ন ফলন আৰু $f \in R$ [a, b]। কোনো এটা বিন্দু $c \in [a, b]$ৰ বাবে দেখুওৱা যে $\int_a^b f(x)\,dx = (b - a) f(c)$।

(b) f is a non-negative continuous function on [a, b] and $\int_a^b f(x)\,dx = 0$. Prove that f(x) = 0 $\forall\ x \in [a, b]$.

[a, b] অন্তৰালত f এটা অঋণাত্মক অবিচ্ছিন্ন ফলন আৰু $\int_a^b f(x)\,dx = 0$। প্ৰমাণ কৰা যে f(x) = 0 $\forall\ x \in$ [a, b]।

(c) Let f be a bounded function on [a, b]. If the set of points of discontinuity of f is finite, then prove that f is R-integrable over [a, b].

[a, b] অন্তৰালত f এটা সীমিত ফলন। f ফলনটো [a, b] অন্তৰালৰ সসীম সংখ্যক বিন্দুত বিচ্ছিন্ন হ'লে প্ৰমাণ কৰা যে f, [a, b] অন্তৰালত R-অনুকলনীয়।

(d) The function f is defined on [0, 3] as follows : f(x) = x the greatest integer not greater than x. Show that f is R-integrable over [0, 3] and find $\int_0^3 f(x)\,dx$.

[0, 3] অন্তৰালত f ফলনটো তলত দিয়া ধৰণে সংজ্ঞাকৃত কৰা হৈছে। $f(x) = x$তকৈ ডাঙৰ নোহোৱা আটাইতকৈ ডাঙৰ অখণ্ড সংখ্যাটো। দেখুওৱা যে [0, 3] অন্তৰালত f ফলনটো R-অনুকলনীয় আৰু লগতে $\int_0^3 f(x)\,dx$ ৰ মান নিৰ্ণয় কৰা।

6. Answer either (a) and (b) or (c) and (d) : 5+5=10

(a) আৰু (b) নাইবা (c) আৰু (d) অংশৰ উত্তৰ কৰা ঃ

(a) Prove that (প্ৰমাণ কৰা যে)

$$B(l, m) = \frac{\Gamma l\, \Gamma m}{\Gamma(l+m)}$$

(b) Test the convergence of $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$

$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$ অনুকলটোৰ অভিসাৰিতাৰ পৰীক্ষা কৰা।

(c) Prove that (প্ৰমাণ কৰা যে)

$$\int_0^1 \frac{x^{m-1} + x^{n-1}}{(1+x)^{m+n}}\,dx = B(m, n)$$

(d) Test the convergence of $\int_2^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 1}}$.

$\int_2^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 1}}$ অনুকলটোৰ অভিসাৰিতাৰ পৰীক্ষা কৰা।

7. Answer either (a) and (b) or (c) and (d) : 5+5=10

(a) আৰু (b) নাইবা (c) আৰু (d) অংশৰ উত্তৰ কৰা ঃ

(a) Evaluate (মান নিৰ্ণয় কৰা) ঃ

$$\int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi} \cos(x+y)\,dx\,dy.$$

(b) Let D be the triangular domain given by $x \geq 0$, $y \geq 0$ and $x+y \leq 1$. Then prove that

$$\iint_D x^{p-1} y^{q-1} (1 - x - y)^{r-1}\,dx\,dy = \frac{\Gamma p\, \Gamma q\, \Gamma r}{\Gamma(p+q+r)}.$$

D ত্ৰিভুজাকৃতিৰ ক্ষেত্ৰফল হ'ল $x \geq 0$, $y \geq 0$ আৰু $x+y \leq 1$, তেন্তে প্ৰমাণ কৰা যে,

$$\iint_D x^{p-1} y^{q-1} (1 - x - y)^{r-1}\,dx\,dy = \frac{\Gamma p\, \Gamma q\, \Gamma r}{\Gamma(p+q+r)}$$

(c) Evaluate $\iint_D \sqrt{4x^2 - y^2}\, dx\, dy$

where D is the triangle formed by the lines $y = 0$, $x = 1$ and $y = x$.

$\iint_D \sqrt{4x^2 - y^2}\, dx\, dy$ৰ মান নিৰ্ণয় কৰা য'ত D ক্ষেত্ৰটো হ'ল $y = 0$, $x = 1$ আৰু $y = x$ ৰেখাৰে আগুৰা ত্ৰিভুজ।

(d) Evaluate $\iint_R \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right) dx\, dy$

where R is the region in the positive quadrant of the ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

$\iint_R \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right) dx\, dy$ৰ মাননিৰ্ণয় কৰা য'ত R ক্ষেত্ৰটো হ'ল $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ উপবৃত্তৰ ধনাত্মক চতুৰ্থাংশ।