2014

MATHEMATICS

(General)

Paper : 6.2

(Advanced Calculus)

Full Marks : 80

Time : 3 hours

The figures in the margin indicate full marks for the questions

Answer either *in English* or *in Assamese*

1. Answer the following questions : 1×10=10

তলত দিয়া প্ৰশ্নবোৰৰ উত্তৰ কৰা :

(a) Considering the usual metric d on $[0, 1]$ defined by $d(x, y) = |x - y| \ \forall \ x, y \in [0, 1]$, write the closed ball $S[\frac{1}{32}, \frac{3}{32}]$ in interval.

$[0, 1]$ অন্তৰালত সংজ্ঞাকৃত সাধাৰণ দূৰিক dৰ বাবে, য'ত $d(x, y) = |x - y| \ \forall \ x, y \in [0, 1]$, বন্ধ গোলক $S[\frac{1}{32}, \frac{3}{32}]$ক অন্তৰালত লিখা।

(b) What do you mean by limit point of a subset A of a metric space X?

দূৰিক স্থান Xৰ এটা উপসংহতি Aৰ চৰম বিন্দু বুলিলে কি বুজা?

(c) Let $A=\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots\}$ with the usual metric on R. Find A', the derived set of A.

Rত সাধাৰণ দূৰিকৰ বাবে A' নিৰ্ণয় কৰা য'ত $A=\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots\}$ আৰু A' হ'ল Aৰ সকলো চৰম বিন্দুৰ সংহতি।

(d) If f be a non-negative continuous function on $[a, b]$ and $\int_a^b f(x)\,dx = 0$, what is the value of $f(x)\ \forall\, x \in [a, b]$?

$[a, b]$ অন্তৰালত f এটা অঋণাত্মক অবিচ্ছিন্ন ফলন আৰু $\int_a^b f(x)\,dx = 0$, হ'লে সকলো $x \in [a, b]$ৰ বাবে $f(x)$ৰ মান কি?

(e) "No discontinuous function is Riemann integrable." Is the above statement always true?

"কোনো অবিচ্ছিন্ন ফলনেই Riemann অনুকলনীয় নহয়।" উক্তিটো সদায় সচাঁ নে?

(f) Let f and g be two positive functions such that $f(x) \le g(x)\ \forall\, x \in [a, b]$ and $\int_a^b g(x)\,dx$ is convergent. Is $\int_a^b f(x)\,dx$ convergent?

$[a, b]$ অন্তৰালত f আৰু g দুটা ধনাত্মক ফলন যাতে $f(x) \le g(x)\ \forall\, x \in [a, b]$ আৰু $\int_a^b g(x)\,dx$ অভিসাৰী। $\int_a^b f(x)\,dx$ অভিসাৰী নে?

(g) Let f be bounded and R-integrable in the interval (a, x) where $a>0$, $x \ge a$ such that $\lim_{x\to\infty} x^{\mu} f(x)$ exists finitely. For what value of μ, will $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ be convergent?

ধৰা হ'ল (a, x) য'ত $a>0$, $x \ge a$, অন্তৰালত f এটা পৰিসীমিত আৰু R-অনুকলনীয় ফলন যাতে $\lim_{x\to\infty} x^{\mu} f(x)$ স্থিত আৰু সসীম। μৰ কি মানৰ বাবে $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ অভিসাৰী হ'ব?

(h) Write the value of $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$.

$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$ৰ মান লিখা।

(i) State Bolzano-Weierstrass theorem.

Bolzano-Weierstrassৰ উপপাদ্যটো লিখা।

(j) Write the value of $\Gamma(n)$ when n is a positive integer.

n এটা স্বাভাৱিক সংখ্যা হ'লে, $\Gamma(n)$ৰ মান লিখা।

2. Answer the following questions : 2×5=10

তলত দিয়া প্ৰশ্নবোৰৰ উত্তৰ কৰা :

(a) Let X be a non-empty set. The mapping $d: X \times X \to R$ is defined as follows :

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{if} \quad x = y \\ 1 & \text{if} \quad x \neq y \end{cases} \quad \forall\, x,\ y \in X$$

show that d is a metric for X.

X এটা অৰিক্ত সংহতি। $d: X \times X \to R$ চিত্ৰণটো তলত দিয়া ধৰণে সংজ্ঞাকৃত কৰা হৈছে:

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{যদি} \quad x = y \\ 1 & \text{যদি} \quad x \neq y \end{cases} \quad \forall\, x,\ y \in X$$

দেখুওৱা যে X সংহতিত d চিত্ৰণটো এটা দূৰিক।

(b) Show that every open sphere for the metric space (R, d) is an open interval, where the metric d is defined as

$$d(x, y) = |x - y| \quad \forall\, x,\ y \in R$$

দেখুওৱা যে (R, d) দূৰিক স্থানৰ প্ৰতিটো মুক্ত গোলকেই একোটা মুক্ত অন্তৰাল য'ত d দূৰিকৰ সংজ্ঞা হ'ল

$$d(x, y) = |x - y| \quad \forall\, x,\ y \in R$$

(c) A function f is defined on $[-1, 1]$ as follows :

$$f(x) = \begin{cases} K, & \text{a positive constant when } x \neq 0 \\ 0, & \text{when } x = 0 \end{cases}$$

show that f is R-integrable over $[-1, 1]$.

$[-1, 1]$ অন্তৰালত f ফলনটো তলত উল্লেখ কৰা ধৰণে সংজ্ঞাকৃত কৰা হৈছে :

$$f(x) = \begin{cases} K, & \text{এটা ধনাত্মক ধ্ৰুৱক সংখ্যা যেতিয়া } x \neq 0 \\ 0, & \text{যেতিয়া } x = 0 \end{cases}$$

দেখুওৱা যে f ফলনটো $[-1, 1]$ অন্তৰালত R-অনুকলনীয়।

(d) Show that the integral $\int_a^\infty \frac{\sin^2 x}{x^2}\, dx$ is convergent, $a > 0$.

দেখুওৱা যে $\int_a^\infty \frac{\sin^2 x}{x^2}\, dx$ অনুকলটো অভিসাৰী $(a > 0)$.

(e) Prove that $B(m, n) = B(n, m)$.

প্ৰমাণ কৰা যে $B(m, n) = B(n, m)$.

3. Answer any *four* parts : 5×4=20

যি কোনো চাৰিটা অংশৰ উত্তৰ কৰা :

(a) Let $R^3 = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1, x_2, x_3 \in R$, the set of real numbers$\}$. Define the mapping $d: R^3 \times R^3 \to R$ by

$$d(x, y) = \sum_{i=1}^{3} |x_i - y_i| \quad \forall\ x = (x_1, x_2, x_3)$$
$$y = (y_1, y_2, y_3) \in R^3$$

Show that d is a metric for R^3.

ধৰা হ'ল $R^3 = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1, x_2, x_3 \in R,$ বাস্তৱ সংখ্যাৰ সংহতি}. $d : R^3 \times R^3 \to R$ ফলনটো তলত দিয়া ধৰণে সংজ্ঞাকৃত কৰা হৈছে

$$d(x, y) = \sum_{i=1}^{3} |x_i - y_i| \ \forall \ x = (x_1, x_2, x_3)$$

$$y = (y_1, y_2, y_3) \in R^3$$

দেখুওৱা যে R^3 সংহতিৰ বাবে d এটা দূৰিক।

(b) Prove that in a metric space, the intersection of a finite number of open sets is open.

প্ৰমাণ কৰা যে এটা দূৰিক স্থানত সসীম সংখ্যক মুক্ত সংহতিৰ ছেদন এটা মুক্ত সংহতি।

(c) Prove that every monotonic increasing function on $[a, b]$ is R-integrable over $[a, b]$.

প্ৰমাণ কৰা যে $[a, b]$ অন্তৰালত সংজ্ঞাবদ্ধ প্ৰতিটো একদিষ্ট বৰ্দ্ধমান ফলন $[a, b]$ অন্তৰালত R-অনুকলনীয়।

(d) Examine the convergence of the integral

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^{1/2}(1-x)^{1/3}}$$

$\int_0^1 \frac{dx}{x^{1/2}(1-x)^{1/3}}$ অনুকলনটোৰ অভিসাৰীতা পৰীক্ষা কৰা।

(e) Prove that (প্ৰমাণ কৰা যে)

$$B(l, m) = \frac{\Gamma(l)\,\Gamma(m)}{\Gamma(l+m)}$$

(f) Evaluate (মান নিৰ্ণয় কৰা) :

$$\iint_D \sqrt{x^2 + y^2}\, dxdy$$

where D is the region $x^2 + y^2 \le a^2$.

য'ত D ক্ষেত্ৰটো হ'ল $x^2 + y^2 \le a^2$.

4. Answer *either* (a) *or* (b) : 10

(a) নাইবা *(b)*ৰ উত্তৰ কৰা:

(a) (i) Prove that in a metric space (X, d), the empty set ϕ and the whole space X are open sets. 4

প্ৰমাণ কৰা যে এটা দূৰিক স্থান (X, d)ত, ৰিক্ত সংহতি ϕ আৰু X সংহতি দুটা মুক্ত সংহতি।

(ii) Prove that in a metric space the union of a finite number of closed sets is closed. Give an example to show that the union of an infinite number of closed sets in a metric space is not necessarily a closed set. 3+3=6

প্ৰমাণ কৰা যে এটা দূৰিক স্থানত সসীম সংখ্যক বন্ধ সংহতিৰ মিলন এটা বন্ধ সংহতি। এটা উদাহৰণৰ সহায়ত দেখুওৱা যে এটা দূৰিক স্থানত অসীম সংখ্যক বন্ধ সংহতিৰ মিলন এটা বন্ধ সংহতি নহ'বও পাৰে।

(b) (i) Prove that a subset A of a metric space X is closed if and only if A contains all its limit points. 5

প্ৰমাণ কৰা যে এটা দূৰিক স্থান Xৰ এটা উপসংহতি A এটা বন্ধ সংহতি হ'ব যদি আৰু যদিহে A সংহতিটোৰ সকলোবোৰ চৰম বিন্দু Aত থাকে।

(ii) Prove that in a metric space, every convergent sequence is a Cauchy sequence. 5

প্ৰমাণ কৰা যে এটা দূৰিক স্থানত প্ৰতিটো ক'শ্বি অনুক্ৰমেই অভিসাৰী।

5. Answer *either* (a) *or* (b) : 10

(a) নাইবা (b)ৰ উত্তৰ কৰা :

(a) Let f be a bounded function on $[a, b]$ and $f \in R[a, b]$. F is another function such that

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt \quad \forall\, x \in [a,\ b]$$

Then prove that F is continuous on $[a, b]$. Further if f is differentiable at a point $x_0 \in [a, b]$, then prove that F is differentiable at x_0 and $F'(x_0) = f(x_0)$.

5+5=10

ধৰা হ'ল $[a, b]$ অন্তৰালত f এটা পৰিসীমিত ফলন আৰু $f \in R[a, b]$. F আন এটা ফলন যাতে

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt \quad \forall\, x \in [a,\ b]$$

প্ৰমাণ কৰা যে F এটা অবিচ্ছিন্ন ফলন। আকৌ যদি $[a, b]$ অন্তৰালৰ x_0 বিন্দুত f ফলনটো অৱকলনীয় হয়, তেন্তে দেখুওৱা যে x_0 বিন্দুত F ফলনটোও অৱকলনীয় আৰু $F'(x_0) = f(x_0)$.

(b) (i) If the function f be bounded and R-integrable on $[a, b]$ and if there is a differentiable function F on $[a, b]$ such that $F'(x) = f(x)$, then prove that

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

5

যদি $[a, b]$ অন্তৰালত f এটা পৰিসীমিত আৰু R-অনুকলনীয় ফলন হয় আৰু যদি $[a, b]$ অন্তৰালত এটা অৱকলনীয় ফলন F থাকে যাতে $F'(x) = f(x)$, তেন্তে প্ৰমাণ কৰা যে

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

(ii) The function f is defined as follows :

$$f(x) = \frac{1}{2^n} \text{ when } \frac{1}{2^{n+1}} < x \le \frac{1}{2^n} \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

$$f(0) = 0$$

Show that f is R-integrable on $[0, 1]$ although it has an infinite number of points of discontinuity in $[0, 1]$. 5

f ফলনটো তলত উল্লেখ কৰা ধৰণে সংজ্ঞাকৃত কৰা হৈছে :

$$f(x) = \frac{1}{2^n} \text{ যেতিয়া } \frac{1}{2^{n+1}} < x \le \frac{1}{2^n} \; (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

$$f(0) = 0$$

দেখুওৱা যে f ফলনটো $[0, 1]$ অন্তৰালত R-অনুকলনীয়। যদিও f ফলনটো $[0, 1]$ অন্তৰালত অসীম সংখ্যক বিন্দুত অবিচ্ছিন্ন।

6. Answer *either* (a) *or* (b) : 10

(a) নাইবা (b)ৰ উত্তৰ কৰা :

(a) (i) Test the convergence of 3+3=6

(1) $\int_0^\infty \frac{\cos x}{1+x^2} dx$

(2) $\int_1^\infty \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}$

অভিসাৰীতা পৰীক্ষা কৰা :

(1) $\int_0^\infty \frac{\cos x}{1+x^2} dx$

(2) $\int_1^\infty \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}$

(ii) Show that (দেখুওৱা যে)

$$\int_0^{\pi/2} \sin^p \theta \cos^q \theta \, d\theta = \frac{\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{q+1}{2}\right)}{2\Gamma\left(\frac{p+q+2}{2}\right)}; \; p > -1, \; q > -1$$

4

(b) (i) Show that the integral $\int_0^1 \frac{dx}{x^3(1+x^2)}$ is divergent. 5

দেখুওৱা যে $\int_0^1 \frac{dx}{x^3(1+x^2)}$ অনুকলটো অপসাৰী।

(ii) Prove that (প্ৰমাণ কৰা যে) :

$$\int_0^\infty \frac{x^{n-1}}{(1+x)^{m+n}} dx = B(m, n); \quad m, n > 0$$

5

7. Answer *either* (a) *or* (b) : 10

(a) নাইবা (b)ৰ উত্তৰ কৰা :

(a) (i) Evaluate (মান নিৰ্ণয় কৰা) :

$$\int_0^1 \left\{ \int_0^1 \frac{x-y}{(x+y)^3} dy \right\} dx$$

4

(ii) Evaluate (মান নিৰ্ণয় কৰা) :

$$\iiint_D \frac{dxdydz}{\sqrt{1-x^2-y^2-z^2}}$$

where D is the region given by $x^2 + y^2 + z^2 < 1$ and $x \ge 0, y \ge 0, z \ge 0$. 6

(য'ত D ক্ষেত্ৰটো হ'ল $x^2 + y^2 + z^2 < 1$ আৰু $x \ge 0, \; y \ge 0, \; z \ge 0$)

(b) (i) Prove that (প্ৰমাণ কৰা যে) : 4

$$\int_0^1 dx \int_0^x e^{y/x} dy = \frac{1}{2}(e-1)$$

(ii) Prove that (প্ৰমাণ কৰা যে) :

$$\iiint_R (x+y+z)\, dxdydz = \frac{9}{2}$$

where $R: 0 \le x \le 1; 1 \le y \le 2; 2 \le z \le 3$ 6

(য'ত $R: 0 \le x \le 1;\ 1 \le y \le 2;\ 2 \le z \le 3$)

★★★