2014

MATHEMATICS

(General)

Paper : 6.1

(Linear Algebra and Complex Analysis)

Full Marks : 80

Time : 3 hours

The figures in the margin indicate full marks for the questions

Answer either *in English* or *in Assamese*

1. Mention if the statements given below are True or False : 1×10=10

তলত দিয়া উক্তিবোৰ শুদ্ধ নে অশুদ্ধ নিৰ্ণয় কৰা :

(a) Every field is a vector space over any of its subfield.

প্ৰত্যেক ক্ষেত্ৰই তাৰ যি কোনো উপক্ষেত্ৰৰ ওপৰত বৈখিক স্থানৰ সূচনা কৰে।

(b) If W_1 and W_2 are two subspaces of a vector space V, then $W_1 \cup W_2$ is also a subspace of V.

W_1 আৰু W_2 কোনো এক বৈখিক স্থান Vৰ দুটা উপস্থান হ'লে, $W_1 \cup W_2$-ও Vৰ এটা উপস্থান হ'ব।

(c) Any set of vectors of a vector space including the zero vector is linearly dependent.

এটা বৈখিক স্থানৰ ভেক্টৰৰ যি কোনো সংহতি এটাত শূন্য ভেক্টৰটো সন্নিবিষ্ট হ'লে, সংহতিটো বৈখিকভাৱে পৰতন্ত্ৰ হ'ব।

(d) The set $\mathbb{C} = \{x + iy \mid x, y \in \mathbb{R},\ i = \sqrt{-1}\}$ of all complex numbers is a vector space over $\mathbb{R}$ with $B = \{1, i\}$ as basis.

$\mathbb{C} = \{x + iy \mid x, y \in \mathbb{R},\ i = \sqrt{-1}\}$, আটাইবোৰ জটিল সংখ্যাৰ সংহতি হ'লে ই বাস্তৱ সংখ্যাৰ সংহতি $\mathbb{R}$ৰ ওপৰত এক বৈখিক স্থানৰ সৃষ্টি কৰে যাৰ আধাৰ হ'ল $B = \{1, i\}$.

(e) Any two bases of a finite dimensional vector space may contain different numbers of vectors.

সসীম মাত্ৰাৰ বৈখিক স্থান এটাৰ যি কোনো দুটা ভূমিত ভিন্ন সংখ্যক ভেক্টৰ থকাটো সম্ভৱ।

(f) The set $S = \{(x, y),\ x + y = 0,\ x, y \in \mathbb{R}\}$ is a subspace of the vector space

$$V_2(\mathbb{R}) = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$$

$S = \{(x, y),\ x + y = 0,\ x, y \in \mathbb{R}\}$ সংহতিটো বৈখিক স্থান $V_2(\mathbb{R}) = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ৰ এটা উপস্থান।

(Continued)

(g) If z_1 and z_2 are any two complex numbers, then

$$\mathrm{Re}(z_1 z_2) = \mathrm{Re}(z_1)\,\mathrm{Re}(z_2)$$

$\mathrm{Re}(z_1)$, $\mathrm{Re}(z_2)$ denoting the real parts of the complex numbers z_1 and z_2 respectively.

z_1 আৰু z_2 যি কোনো দুটা জটিল সংখ্যা হ'লে

$$\mathrm{Re}(z_1 z_2) = \mathrm{Re}(z_1)\,\mathrm{Re}(z_2)$$

য'ত $\mathrm{Re}(z_1)$ আৰু $\mathrm{Re}(z_2)$ ক্ৰমে z_1 আৰু z_2 জটিল সংখ্যা দুটাৰ বাস্তৱ অংশ।

(h) The function $f(z) = \bar{z}$ is analytic everywhere in the complex plane.

$f(z) = \bar{z}$ ফলনটো জটিল সমতলৰ সকলোতে বৈশ্লেষিক।

(i) If $z = x + iy,\ x, y \in \mathbb{R}$, then $f(z) = \log z$ is a many-valued function.

$z = x + iy,\ x, y \in \mathbb{R}$ৰ বাবে $f(z) = \log z$ এটা বহু মানবিশিষ্ট ফলন।

(j) If a and z are any two points in a simply connected domain D in the complex plane $\mathbb{C}$, then $\int_a^z f(z)\,dz$ depends on the paths joining a and z, where $f(z)$ is analytic in D.

জটিল সমতল $\mathbb{C}$ত বিবেচনা কৰা এটা একসংযোগীক্ষেত্ৰ Dৰ বাবে $a, z \in D$ হ'লে, $\int_a^z f(z)\,dz$ৰ মান a আৰু z সংযোগী পথৰ ওপৰত নিৰ্ভৰশীল, য'ত $f(z)$ ফলনটো D ক্ষেত্ৰত বৈশ্লেষিক।

(Turn Over)

2. (a) Answer any *two* of the following questions : 2×2=4

তলৰ প্ৰশ্নসমূহৰ যি কোনো দুটাৰ উত্তৰ লিখা :

(i) Let $V(F)$ be a vector space over a field F. If $\overline{0}$ denotes the zero vector of $V(F)$ and $a \in F$, then prove that

$$a\overline{0} = \overline{0}$$

ধৰা হ'ল, $V(F)$ ক্ষেত্ৰ Fৰ ওপৰত এটা বৈখিক স্থান। যদি $\overline{0}$ $V(F)$ৰ শূন্য ভেক্টৰ আৰু $a \in F$ হয়, তেন্তে প্ৰমাণ কৰা যে,

$$a\overline{0} = \overline{0}$$

(ii) Let $M_2(\mathbb{R})$ be the vector space of all 2×2 matrices over reals and

$$W_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \middle| \, a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

Is W_1 a subspace of $M_2(\mathbb{R})$? Give your answer with justification.

ধৰা হ'ল, $M_2(\mathbb{R})$ ক্ষেত্ৰ $\mathbb{R}$ৰ ওপৰত সকলো 2×2 মৌলকক্ষৰে গঠিত বৈখিক স্থান আৰু

$$W_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \middle| \, a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

W_1, $M_2(\mathbb{R})$ৰ এটা উপস্থান হয় নে? যুক্তিৰে প্ৰতিপন্ন কৰা।

(iii) Examine if the subset $S = \{(1, 0), (0, 1)\}$ of vector space $V_2(\mathbb{R}) = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ is linearly independent or not.

বৈখিক স্থান $V_2(\mathbb{R}) = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ৰ উপসংহতি $S = \{(1, 0), (0, 1)\}$ বৈখিকভাৱে স্বতন্ত্ৰ হয় নে নহয়, পৰীক্ষা কৰা।

(b) Answer any *three* of the following questions : 2×3=6

তলৰ প্ৰশ্নসমূহৰ যি কোনো তিনিটাৰ উত্তৰ লিখা :

(i) Find the principal value of i^i, where $i = \sqrt{-1}$.

i^iৰ মুখ্য মান উলিওৱা, য'ত $i = \sqrt{-1}$.

(ii) Define $\sin z$ and $\cos z$ for $z \in \mathbb{C}$ and establish the identity

$$\sin^2 z + \cos^2 z = 1$$

$z \in \mathbb{C}$ৰ বাবে $\sin z$ আৰু $\cos z$ৰ সংজ্ঞা লিখা আৰু সাব্যস্ত কৰা যে,

$$\sin^2 z + \cos^2 z = 1$$

(iii) If $f(z) = z^3 - 2z$, $z \in \mathbb{C}$, then find $f'(z)$ at $z = -1$, provided the value exists.

যদি $f(z) = z^3 - 2z$, $z \in \mathbb{C}$, তেন্তে $z = -1$ত $f'(z)$ নিৰ্ণয় কৰা যদিহে এই মান স্থিত হয়।

(iv) Give the definition of the complex line integral $\int_C f(z)\,dz$, where $f(z)$ is continuous for all z on the rectifiable curve C of finite length.

জটিল ৰেখা-সমাকল $\int_C f(z)\,dz$ৰ সংজ্ঞা লিখা, য'ত $f(z)$ সসীম দৈৰ্ঘ্যৰ একমুখীকৰণযোগ্য এটা বক্ৰ Cৰ ওপৰত থকা সকলো বিন্দু zত অবিচ্ছিন্ন।

(v) Calculate $\int_C \bar{z}\,dz$ from $z=0$ to $z=4+2i$ along the curve C given by

$$z = t^2 + it$$

$z = t^2 + it$ যে নিৰ্দেশ কৰা এটা বক্ৰ C ৰে $z=0$ৰ পৰা $z=4+2i$ লৈ $\int_C \bar{z}\,dz$ৰ মান উলিওৱা।

3. *(a)* Answer any *two* of the following questions : 5×2=10

তলৰ প্ৰশ্নসমূহৰ যি কোনো দুটাৰ উত্তৰ লিখা :

(i) Let W_1 and W_2 be two subspaces of a vector space $V(F)$. Define linear sum $W_1 + W_2$ and prove that $W_1 + W_2$ is a subspace of $V(F)$.

ধৰা হ'ল, W_1 আৰু W_2 এটা ৰৈখিক স্থান $V(F)$ৰ দুটা উপস্থান। ৰৈখিক সমষ্টি $W_1 + W_2$ৰ সংজ্ঞা লিখা আৰু প্ৰমাণ কৰা যে $W_1 + W_2$, $V(F)$ৰ এটা উপস্থান।

(ii) Define linear span $L(S)$ for any finite subset S of a vector space $V(F)$. Show that the linear span $L(S)$ of a finite set S in a vector space $V(F)$ is a subspace of $V(F)$.

এটা ৰৈখিক স্থান $V(F)$ৰ যি কোনো সসীম উপসংহতি Sৰ বাবে ৰৈখিক বিস্তাৰ $L(S)$ ৰ সংজ্ঞা লিখা। দেখুওৱা যে, ৰৈখিক স্থান $V(F)$ ৰ যি কোনো সসীম সংহতি S ৰ ৰৈখিক বিস্তাৰ $L(S)$, $V(F)$ ৰ এটা উপস্থান।

(iii) Show that the set

$$S = \{(2, -1, 0), (3, 5, 1), (1, 1, 2)\}$$

forms a basis for the vector space $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$.

দেখুওৱা যে

$$S = \{(2, -1, 0), (3, 5, 1), (1, 1, 2)\}$$

সংহতিটো ৰৈখিক স্থান $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ ৰ বাবে এক আধাৰ।

(b) Answer any *two* of the following questions : 5×2=10

তলৰ প্ৰশ্নসমূহৰ যি কোনো দুটাৰ উত্তৰ লিখা :

(i) If $f(z)$ is analytic with its derivative $f'(z)$ continuous at all points inside and on a simple closed curve C, prove that

$$\int_C f(z)\,dz = 0$$

যদি $f(z)$ ফলনটো বৈশ্লেষিক আৰু ইয়াৰ অৱকলজ $f'(z)$ সৰলভাৱে আবদ্ধ এটা বক্র Cৰ অন্তৰ্ভাগকে ধৰি ইয়াৰ ওপৰৰ সকলো বিন্দুতে অবিচ্ছিন্ন, তেন্তে প্ৰমাণ কৰা যে,

$$\int_C f(z)\, dz = 0$$

(ii) Prove that

$$\int_C \frac{dz}{z-a} = 2\pi i$$

where C is any simple closed curve containing the point $z=a$ in the region bounded by C.

প্ৰমাণ কৰা যে

$$\int_C \frac{dz}{z-a} = 2\pi i$$

য'ত C এটা সৰলভাৱে আবদ্ধ বক্র আৰু $z=a$, Cৰ দ্বাৰা আবদ্ধ ক্ষেত্ৰৰ এটা যি কোনো বিন্দু।

(iii) Evaluate

$$\int_C (x^2 - iy^2)\, dz$$

along the parabola $y = 2x^2$ from (1, 1) to (2, 8).

$\int_C (x^2 - iy^2)\, dz$ৰ মান উলিওৱা, য'ত C য়ে অধিবৃত্ত $y = 2x^2$ৰ (1, 1)ৰ পৰা (2, 8) লৈ অংশটোক নিৰ্দেশ কৰে।

4. Let $T: U(F) \to V(F)$ be a linear transformation from a vector space $U(F)$ into another vector space $V(F)$. Define the null space and range space of T. Prove that both null space and range space of T are subspaces of $U(F)$ and $V(F)$ respectively. 2+4+4=10

ধৰা হ'ল, $T: U(F) \to V(F)$, বৈখিক স্থান $U(F)$ৰ পৰা আন এক বৈখিক স্থান $V(F)$ লৈ এটা বৈখিক ৰূপান্তৰণ। Tৰ শূন্যস্থান আৰু পৰিসৰ স্থানৰ সংজ্ঞা লিখা। প্ৰমাণ কৰা যে, Tৰ শূন্যস্থান আৰু পৰিসৰ স্থান উভয়ে ক্ৰমে $U(F)$ আৰু $V(F)$ৰ উপস্থান।

Or / অথবা

Let $T: U(F) \to V(F)$ be a linear transformation from a vector space $U(F)$ into a vector space $V(F)$. Then show that *(a)* $T(0) = 0$, where 0 denotes the zero vector of vector space in the appropriate context and *(b)* $T(-\alpha) = -T(\alpha),\ \forall\, \alpha \in U(F)$. 5+5=10

ধৰা হ'ল, $T: U(F) \to V(F)$, বৈখিক স্থান $U(F)$ৰ পৰা $V(F)$ লৈ এটা বৈখিক ৰূপান্তৰণ। দেখুওৱা যে, (ক) $T(0) = 0$, য'ত 0 য়ে যথাযোগ্য প্ৰসংগ সাপেক্ষে বৈখিক স্থানৰ শূন্যক নিৰ্দেশ কৰে আৰু (খ) $T(-\alpha) = -T(\alpha),\ \forall\, \alpha \in U(F)$.

5. What do you mean by the normal form of an $m \times n$ matrix A of rank r? Find the rank of the matrix

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 1 & 3 & 8 \\ 4 & 2 & 6 & -1 \\ 10 & 3 & 9 & 7 \\ 16 & 4 & 12 & 15 \end{bmatrix}$$

by reducing it into normal form. 2+8=10

r কোটিযুক্ত এটা $m \times n$ মৌলকক্ষ Aৰ প্ৰসামান্য আকাৰ বুলিলে কি বুজা? প্ৰসামান্য আকাৰলৈ ৰূপান্তৰ কৰি

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 1 & 3 & 8 \\ 4 & 2 & 6 & -1 \\ 10 & 3 & 9 & 7 \\ 16 & 4 & 12 & 15 \end{bmatrix}$$

মৌলকক্ষৰ কোটি নিৰ্ণয় কৰা।

Or / অথবা

Let $L(U, V)$ denote the set of all linear transformations from a vector space U into another vector space V defined over the same field F. For any $T_1, T_2 \in L(U, V)$, $\alpha \in U$, $a \in F$, define

$$(T_1 + T_2)(\alpha) = T_1(\alpha) + T_2(\alpha)$$
$$(aT_1)(\alpha) = aT_1(\alpha)$$

Prove that $L(U, V)$ is a vector space over F. 10

ধৰা হ'ল, $L(U, V)$ যে একেটা ক্ষেত্ৰ Fৰ ওপৰত সংজ্ঞাবদ্ধ ৰৈখিক স্থান Uৰ পৰা ৰৈখিক স্থান V লৈ আটাইবোৰ ৰৈখিক ৰূপান্তৰণৰ সংহতি। যি কোনো $T_1, T_2 \in L(U, V)$, $\alpha \in U$, $a \in F$ৰ বাবে $T_1 + T_2$ আৰু aT_1ৰ সংজ্ঞা এনেদৰে দিয়া হ'ল

$$(T_1 + T_2)(\alpha) = T_1(\alpha) + T_2(\alpha)$$
$$(aT_1)(\alpha) = aT_1(\alpha)$$

প্ৰমাণ কৰা যে, $L(U, V)$ যে Fৰ ওপৰত এটা ৰৈখিক স্থানৰ সূচনা কৰে।

6. Define eigenvalue and eigenvector of an $n \times n$ matrix A over the field of reals ($\mathbb{R}$). Show that every square matrix A satisfies its own characteristic equations. 2+8=10

বাস্তৱ সংখ্যাৰ ক্ষেত্ৰ $\mathbb{R}$ত বিবেচনা কৰা এটা $n \times n$ মৌলকক্ষ Aৰ আইগেন মান আৰু আইগেন ভেক্টৰৰ সংজ্ঞা আগবঢ়োৱা। দেখুওৱা যে প্ৰত্যেক বৰ্গ মৌলকক্ষ A যে তাৰ নিজৰ আভিলক্ষণিক সমীকৰণক সিদ্ধ কৰে।

Or / অথবা

Verify Cayley-Hamilton theorem for the matrix

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

and hence find A^{-1}. 6+4=10

মৌলকক্ষ $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ৰ বাবে কেইলি-হেমিল্টন উপপাদ্যটো প্ৰত্যায়িত কৰা আৰু ইয়াৰ পৰা A^{-1} নিৰ্ণয় কৰা।

7. Prove that the necessary and sufficient conditions for a complex function

$$W = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

to be analytic in a region R are

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{and} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

where all partial derivatives are assumed continuous on R. 4+6=10

এটা জটিল ফলন

$$W = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

জটিল সমতলৰ R ক্ষেত্ৰত বৈশ্লেষিক হোৱাৰ চৰ্তসমূহ হ'ল

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \text{ আৰু } \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

প্ৰমাণ কৰা যে, এই চৰ্তসমূহ প্ৰয়োজনীয় আৰু পৰ্যাপ্ত য'ত আংশিক অৱকলজসমূহক R ত অবিচ্ছিন্ন বুলি ধৰা হৈছে।

Or / অথবা

Prove that

$$u = e^{-x}(x \sin y - y \cos y)$$

is harmonic and find v such that $f(z) = u + iv$ is analytic. 5+5=10

প্ৰমাণ কৰা যে

$$u = e^{-x}(x \sin y - y \cos y)$$

বাস্তৱ ফলনটো সমঞ্জস আৰু এটা বাস্তৱ ফলন v নিৰ্ণয় কৰা যাতে $f(z) = u + iv$ ফলনটো বৈশ্লেষিক হয়।

* * *