

Total No. of printed pages = 11

3 (Sem 4) MAT

2015

**MATHEMATICS**

**(General)**

**(Coordinate Geometry and Vector Analysis)**

Full Marks – 80

Time – Three hours

The figures in the margin indicate full marks  
for the questions.

Answer either in English or in Assamese.

উত্তৰ ইংৰাজী অথবা অসমীয়াত কৰিবা।

**PART – I**

**(Objective type questions)**

1. Answer the following questions :  $1 \times 10 = 10$

তলত দিয়া প্ৰশ্নবোৰৰ উত্তৰ লিখা :

(i) Write the condition that the general equation of the second degree  $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$  may represent a pair of straight line.

দ্বিতীয় ঘাতৰ সাধাৰণ সমীকৰণ  $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$  য়ে যোৰ সৰলৰেখা বুজোৱাৰ চৰ্তটো লিখা।

[Turn over

(ii) By what angle the axes are to be rotated to remove the  $xy$ -term from the equation  $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$  ?

অক্ষ দুডালক কি কোণত ঘূৰালে  $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$  সমীকৰণটো  $xy$ -পদমুক্ত হ'ব?

(iii) Express the hyperbola  $x^2/25 - y^2/16 = 1$  in parametric form.

$x^2/25 - y^2/16 = 1$  পৰাবৃত্তটোক প্ৰাচলিক আকাৰত প্ৰকাশ কৰা।

(iv) Mention the necessary condition for two circles of radii  $r_1$  and  $r_2$  to be orthogonal.

$r_1$  আৰু  $r_2$  ব্যাসার্ধৰ দুটা বৃত্ত লম্বচ্ছেদীয় হোৱাৰ আৱশ্যকীয় চৰ্ত উল্লেখ কৰা।

(v) Define conjugate diameters of an ellipse.

উপবৃত্ত এটাৰ সংযুক্ত ব্যাসৰ সংজ্ঞা দিয়া।

(vi) What is the angle between the planes

$ax + by + cz + d = 0$  and  $a'x + b'y + c'z + d' = 0$  ?

$ax + by + cz + d = 0$  আৰু  $a'x + b'y + c'z + d' = 0$  সমতল দুখনৰ মধ্যবৰ্তী কোণটো কিমান ?

(vii) State the condition of tangency of the plane  $lx + my + nz = p$  to the sphere  $x^2 + y^2 + z^2 + 2ux + 2vy + 2wz + d = 0$ .

$lx + my + nz = p$  সমতলখন  $x^2 + y^2 + z^2 + 2ux + 2vy + 2wz + d = 0$  গোলকটোৰ স্পৰ্শক হোৱাৰ চৰ্তটো বৰ্ণনা কৰা।

(viii) If  $a, b, c, d$  are four vectors, then express the product  $(a \times b) \times (c \times d)$  in terms of the vector  $c$  and  $d$ .

$a, b, c, d$  চাৰিটা ভেক্টৰ হ'লে  $(a \times b) \times (c \times d)$  ভেক্টৰটোক  $c$  আৰু  $d$  ভেক্টৰৰ সহায়ত প্ৰকাশ কৰা।

(ix)  $(\text{grad } \phi) \times A + \phi \text{ curl } A = ?$

(x) What is meant by an irrotational vector ?  
অনাৱৰ্তনীয়া ভেক্টৰ বুলিলে কি বুজায় ?

## PART - II

### (Very short answer type questions)

2. Answer the following questions.  $2 \times 5 = 10$

নিম্নোক্ত প্ৰশ্নবোৰৰ উত্তৰ দিয়া :

(a) Find the joint equation of the straight lines which bisect the angles between the two lines given by  $3x^2 + 6xy - y^2 = 0$ .

$3x^2 + 6xy - y^2 = 0$  ৰেখাদ্বয়ৰ মধ্যবৰ্তী কোণৰ সমদ্বিখণ্ডক দুডালৰ যৌথ সমীকৰণ নিৰ্ণয় কৰা।

## (Short answer type questions)

- (b) Find the co-ordinate of the focus and the vertex of the parabola  $y^2 - 4y - 2x - 8 = 0$ .

$y^2 - 4y - 2x - 8 = 0$  অধিবৃত্তটোৰ নাভিবিন্দু আৰু শীৰ্ষবিন্দুৰ স্থানাংক উলিওৱা।

- (c) Show that if the polar of P w.r.t an ellipse passes through Q, then the polar of Q passes through P.

দেখুওৱা যে এটা উপবৃত্ত সাপেক্ষে P বিন্দুৰ ধ্রুৱীয় ৰেখাডাল Q বিন্দুৱেদি গ'লে, Q বিন্দুৰ ধ্রুৱীয় ৰেখাডালো Pয়েদি যাব।

- (d) Find the equation of the right circular cone whose vertex is P(2, -3, 5) axis PQ makes equal angles with the axes and semi-vertical angle is  $30^\circ$ .

P(2, -3, 5) শীৰ্ষবিন্দু, PQ অক্ষই স্থানাংক অক্ষ কেইডালৰ লগত সমান কোণ কৰা আৰু অৰ্ধ-শীৰ্ষকোণ  $30^\circ$  হোৱা সমচক্ৰীয় শংকুটোৰ সমীকৰণ নিৰ্ণয় কৰা।

- (e) If R be a unit vector in the direction of  $\vec{r}$ , prove that

যদি  $\vec{r}$  ৰ দিশত একক ভেক্টৰ R হয়, তেন্তে প্রমাণ কৰা যে

$$\mathbf{R} \times \frac{d\mathbf{R}}{dt} = \frac{1}{r^2} \vec{r} \times \frac{d\vec{r}}{dt} \quad \text{where } r = |\vec{r}|$$

য'ত  $r = |\vec{r}|$

3. Answer any four questions of the following :

তলৰ যি কোনো চাৰিটা প্ৰশ্নৰ উত্তৰ লিখা :

- (a) By a suitable transformation remove the term containing  $xy$  from the equation  $11x^2 + 4xy + 14y^2 = 5$ . 5

এটা যথোপযুক্ত ৰূপান্তৰৰ সহায়ত  $11x^2 + 4xy + 14y^2 = 5$  সমীকৰণটোৰ পৰা  $xy$  পদটো বিলোপ কৰা।

- (b) Find the equation of the directrix of the conic

$$\frac{l}{r} = 1 + e \cos \theta. \quad 5$$

$\frac{l}{r} = 1 + e \cos \theta$  শংকুচ্ছেদটোৰ নিয়ামকৰ সমীকৰণটো নিৰ্ণয় কৰা।

- (c) Find the length and the equations of the shortest distance between the lines

$$\frac{x+3}{-4} = \frac{y-6}{3} = \frac{z}{2} \quad \text{and} \quad \frac{x+2}{-4} = \frac{y}{1} = \frac{z-7}{1}$$

$$\frac{x+3}{-4} = \frac{y-6}{3} = \frac{z}{2} \text{ আৰু } \frac{x+2}{-4} = \frac{y}{1} = \frac{z-7}{1}$$

ৰেখা দুডালৰ মাজৰ হ্রস্বতম দূৰত্বৰ দৈৰ্ঘ্য আৰু সমীকৰণ নিৰ্ণয় কৰা।

(d) Show that the equation of the right circular cylinder whose guiding circle is

$$x^2 + y^2 + z^2 = 9, \quad x - y + z = 3, \text{ is}$$

$$x^2 + y^2 + z^2 + yz - zx + xy = 9. \quad 5$$

দেখুউৱা যে  $x^2 + y^2 + z^2 = 9, x - y + z = 3$  পৰিচালক বৃত্তবিশিষ্ট সমচক্ৰীয় বেলনটোৰ সমীকৰণ হ'ল  $x^2 + y^2 + z^2 + yz - zx + xy = 9$ .

(e) (i) If  $\vec{r} = xi + yj + zk$  and  $r = |\vec{r}|$ , then prove that  $\nabla f(r) = f'(r) \nabla r$ . 3

যদি  $\vec{r} = xi + yj + zk$  আৰু  $r = |\vec{r}|$ , তেন্তে প্রমাণ কৰা যে  $\nabla f(r) = f'(r) \nabla r$ .

(ii) Prove that : (প্রমাণ কৰা যে)

$$[a+b, b+c, c+a] = 2 [a \ b \ c] \quad 2$$

(f) (i) Show that : (দেখুওৱা যে)

$$(b \times c) \times (c \times a) = [a \ b \ c] c \quad 3$$

(ii) Find :  $\frac{d}{dt} \left[ r, \frac{dr}{dt}, \frac{d^2r}{dt^2} \right]$

$\frac{d}{dt} \left[ r, \frac{dr}{dt}, \frac{d^2r}{dt^2} \right]$  উলিওৱা।

## PART - IV

### (Essay type questions)

Answer either (a) or (b) from each of the following four questions : 10×4=40

নিম্নোক্ত প্রশ্ন চাৰিটাৰ প্ৰতিটো প্রশ্নৰ (a) বা (b) অংশৰ উত্তৰ কৰিবা :

4. (a) (i) Find the equation of the pair of straight lines perpendicular to the pair of lines given by  $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ . 5

$ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$  যোৰ সৰলৰেখা দুডালৰ লম্ব হোৱা যোৰ সৰলৰেখাৰ সমীকৰণ উলিওৱা।

(ii) Reduce the equation

$x^2 + 4xy + y^2 - 2x + 2y + 6 = 0$  to the standard form. 5

$x^2 + 4xy + y^2 - 2x + 2y + 6 = 0$  সমীকৰণটোক আদৰ্শ আকাৰলৈ ৰূপান্তৰ কৰা।

(b) (i) Find the condition that the circles

$$x^2 + y^2 + 2g_1x + 2f_1y + c_1 = 0 \text{ and}$$

$$x^2 + y^2 + 2g_2x + 2f_2y + c_2 = 0 \text{ may intersect orthogonally.} \quad 5$$

$x^2 + y^2 + 2g_1x + 2f_1y + c_1 = 0$  আৰু  $x^2 + y^2 + 2g_2x + 2f_2y + c_2 = 0$  বৃত্ত দুটাই লম্বীয় ভাৱে ছেদ কৰাৰ চৰ্তটো উলিওৱা।

(ii) Show that  $x^2 + 6xy + 9y^2 + 4x + 12y - 5 = 0$  represent a pair of straight lines and find the angle between them. 5

দেখুওৱা যে  $x^2 + 6xy + 9y^2 + 4x + 12y - 5 = 0$  সমীকৰণে এযোৰ সৰলৰেখাক বুজায় আৰু সিহঁতৰ মধ্যৰাশী কোণটো নিৰ্ণয় কৰা।

5. (a) (i) Find the pole of the line  $lx + my + n = 0$  with respect to the parabola  $y^2 = 4ax$ . 5

$y^2 = 4ax$  অধিবৃত্তটোৰ সাপেক্ষে  $lx + my + n = 0$  ৰেখাৰ ধ্ৰুৱ বিন্দু নিৰূপণ কৰা।

(ii) Find the asymptotes of the hyperbola

$$2x^2 - xy - y^2 + 2x - 2y + 2 = 0. \quad 5$$

$2x^2 - xy - y^2 + 2x - 2y + 2 = 0$  পৰাবৃত্তটোৰ অনন্তস্পৰ্শী ৰেখাদ্বয় নিৰ্ণয় কৰা।

(b) (i) Prove that the eccentric angles of the extremities of two conjugate semi-diameters of an ellipse differ by a right angle. 5

প্ৰমাণ কৰা যে এটা উপবৃত্তৰ দুডাল অনুবন্ধী অৰ্ধ-ব্যাসৰ প্ৰান্তবিন্দুৰ উৎকেন্দ্ৰিক কোণৰ পাৰ্থক্য এক সমকোণ।

(ii) If the polars of  $(x_1, y_1)$  and  $(x_2, y_2)$  w.r.t  $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$  are at right angles, then show that  $b^4x_1x_2 + a^4y_1y_2 = 0$ . 5

$x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$  পৰাবৃত্ত সাপেক্ষে  $(x_1, y_1)$  আৰু  $(x_2, y_2)$  বিন্দুৰ ধ্ৰুৱীয় ৰেখা দুডাল লম্বমান হ'লে দেখুওৱা যে  $b^4x_1x_2 + a^4y_1y_2 = 0$ .

6. (a) (i) Find the equation to the sphere that passes through the circle  $x^2 + y^2 + z^2 = 5$ ,  $x + 2y + 3z = 3$  and touches the plane  $4x + 3y = 15$ . 5

$x^2 + y^2 + z^2 = 5$ ,  $x + 2y + 3z = 3$  বৃত্তগামী আৰু  $4x + 3y = 15$  সমতলক স্পৰ্শ কৰা গোলকৰ সমীকৰণ নিৰ্ণয় কৰা।

- (ii) Prove that the cone with vertical angle  $60^\circ$ , vertex at  $(0, 0)$  and axis the y-axis is  $3x^2 + 3z^2 = y^2$ . 5

প্রমাণ কৰা যে  $60^\circ$  শীৰ্ষকোণ,  $(0, 0)$  শীৰ্ষবিন্দু আৰু y-অক্ষডাল অক্ষ হোৱা শংকুটোৰ সমীকৰণ হ'ল  $3x^2 + 3z^2 = y^2$ .

- (b) (i) Obtain the equation of the plane through  $(2, 3, -4)$ ,  $(1, -1, 3)$  and parallel to the x-axis. 5

$(2, 3, -4)$  আৰু  $(1, -1, 3)$  বিন্দুগামী আৰু x-অক্ষৰ সমান্তৰাল সমতলখনৰ সমীকৰণ উলিওৱা।

- (ii) Prove that the plane  $ax + by + cz = 0$  cuts the cone  $xy + yz + zx = 0$  in perpendicular lines if

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0. \quad 5$$

প্রমাণ কৰা যে  $ax + by + cz = 0$  সমতলখনে  $xy + yz + zx = 0$  শংকুটোক লম্ব ৰেখাত ছেদ কৰে যদি

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0.$$

7. (a) (i) Prove that : (প্রমাণ কৰা যে)

$$(a \times b) \times (a \times c) \cdot d = (a \cdot d) [a \ b \ c] \quad 5$$

- (ii) A particle moves along the curve  $x = e^{-t}$ ,  $y = 2 \cos(3t)$ ,  $z = 2 \sin(3t)$ . Determine the velocity and acceleration at any time  $t$  and their magnitude at  $t = 0$ . 5

এটা কণিকাই  $x = e^{-t}$ ,  $y = 2 \cos(3t)$ ,  $z = 2 \sin(3t)$  বক্রহিদি গতি কৰে। যি কোনো সময়  $t$ -ত ইয়াৰ বেগ আৰু ত্বৰণ স্থিৰ কৰা আৰু  $t = 0$  বিন্দুত সিহঁতৰ মান নিৰ্ণয় কৰা।

- (b) (i) Show that : (দেখুওৱা যে) 5

$$(a \times b) \cdot (c \times d) = \begin{vmatrix} a \cdot c & b \cdot c \\ a \cdot d & b \cdot d \end{vmatrix}$$

- (ii) If  $f = \text{grad}(x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz)$ , then find  $\text{div } f$  and  $\text{curl } f$ . 5

যদি  $f = \text{grad}(x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz)$ , তেন্তে  $\text{div } f$  আৰু  $\text{curl } f$  নিৰ্ণয় কৰা।