

2014

MATHEMATICS

( General )

( Coordinate Geometry and Vector Analysis )

Full Marks : 80

Time : 3 hours

The figures in the margin indicate full marks  
for the questions

Answer either in English or in Assamese

PART—I

( Objective-type questions )

1. Answer the following questions :  $1 \times 10 = 10$

তলত দিয়া প্রশ্নবোৰৰ উত্তৰ কৰা :

(a) What is the locus represented by the  
equation  $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ ?

$ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$  সমীকৰণটোৰে কি  
সঞ্চাৰপথ সূচায় ?

( 2 )

- (b) Under what condition will the general equation

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$$

of the second degree represents a circle?

কি চৰ্তত

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$$

সাধাৰণ দ্বিঘাত সমীকৰণটোৱে এটা বৃত্ত বুজাব ?

- (c) If the lines  $y = mx$  and  $y = m'x$  are conjugate diameters of the ellipse  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ , then write down the value of  $mm'$ .

যদি  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  উপবৃত্তৰ  $y = mx$  আৰু  $y = m'x$

দুডাল সংযুগ্ম ব্যাস হয়, তেন্তে  $mm'$  ৰ মান লিখা।

- (d) Write down the parametric form of the equation of the circle  $x^2 + y^2 = a^2$ .

$x^2 + y^2 = a^2$  বৃত্তৰ সমীকৰণটোক প্ৰাচলিক ধৰণত লিখা।

( 3 )

- (e) What is the general equation of a plane parallel to  $x$ -axis?

$x$ -অক্ষৰ সমান্তৰাল হোৱা সাধাৰণ সমতলৰ সমীকৰণ কি ?

- (f) Write down the centre and radius of the sphere given by the equation

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2ux + 2vy + 2wz + d = 0$$

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2ux + 2vy + 2wz + d = 0$$

সমীকৰণৰ গোলকটোৰ কেন্দ্ৰ আৰু ব্যাসার্ধ লিখা।

- (g) Write down the equation of the  $x$ -axis in symmetrical form.

সমমিত (symmetrical) আকাৰত  $x$ -অক্ষৰ সমীকৰণটো লিখা।

- (h) If  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$  are coplanar vectors, then  $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = ?$

যদি  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$  তিনিটা সমতলীয় ভেক্টৰ হয়, তেন্তে  $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = ?$

( 4 )

(i) Choose the correct answer :

শুদ্ধ উত্তৰটো লিখা :

If (যদি)  $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ , then (তেন্তে) curl is

- (i) 1                      (ii) 0  
(iii) 3                     (iv) -3

(j) What is the unit tangent vector to the curve at the point  $P$  whose position vector with respect to the origin is  $\vec{r}$ ?এটা বক্ৰৰ ওপৰত কোনো মূলবিন্দু সাপেক্ষে  $\vec{r}$  অবস্থান ভেক্টৰযুক্ত  $P$  বিন্দুত একক স্পৰ্শক ভেক্টৰটো কি ?

## PART—II

(Very short answer-type questions)

2. Answer the following questions :  $2 \times 5 = 10$ 

তলত দিয়া প্ৰশ্নবোৰৰ উত্তৰ কৰা :

(a) If the two pairs of lines  $x^2 - 2pxy - y^2 = 0$  and  $x^2 - 2qxy - y^2 = 0$ be such that each pair bisects the angle between the other pair, prove that  $pq + 1 = 0$ .

যদি

$$x^2 - 2pxy - y^2 = 0 \text{ আৰু } x^2 - 2qxy - y^2 = 0$$

সৰলৰেখা দুযোৰৰ প্ৰতি যোৰেই আনযোৰৰ মাজৰ কোণৰ সমদ্বিখণ্ডক হয়, প্ৰমাণ কৰা যে  $pq + 1 = 0$ .

14A—4000/1235

(Continued)

( 5 )

(b) Find the vertex and focus of the parabola  $4y^2 - 20x - 8y + 39 = 0$ . $4y^2 - 20x - 8y + 39 = 0$  অধিবৃত্তটোৰ শীৰ্ষবিন্দু আৰু নাভি উলিওৱা।

(c) Define pole and polar of a conic.

এটা শাঙ্কৰৰ প্ৰবিন্দু আৰু প্ৰবীয়াৰেখাৰ সংজ্ঞা দিয়া।

(d) Obtain the equation of a cone with its vertex at the origin and passing through the curve  $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$ ,  $lx + my + nz = p$ .মূলবিন্দু শীৰ্ষবিন্দুবিশিষ্ট আৰু  $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$ ,  $lx + my + nz = p$  বক্ৰৰ মাজেদি যোৱা শঙ্কুটোৰ সমীকৰণ উলিওৱা।

(e) Prove that

প্ৰমাণ কৰা যে

$$\frac{d}{dt} \left\{ \vec{r} \cdot \left( \frac{d\vec{r}}{dt} \times \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \right) \right\} = \left[ \vec{r} \frac{d\vec{r}}{dt} \frac{d^3\vec{r}}{dt^3} \right]$$

14A—4000/1235

(Turn Over)

( 6 )

PART—III

( Short answer-type questions )

3. Answer any four questions of the following :

5×4=20

তলৰ যি কোনো চাৰিটা প্ৰশ্নৰ উত্তৰ কৰা :

- (a) If by a rotation of the rectangular axes about the origin, the expression  $ax^2 + 2hxy + by^2$  changes to  $a'x'^2 + 2h'x'y' + b'y'^2$ , then prove that  $a + b = a' + b'$  and  $ab - h^2 = a'b' - h'^2$ . 5

আয়তীয় অক্ষদ্বয়ক মূলবিন্দু সাপেক্ষে ঘূৰালে যদি  $ax^2 + 2hxy + by^2$  বাশিটো  $a'x'^2 + 2h'x'y' + b'y'^2$  লৈ ৰূপান্তৰিত হয়, তেন্তে প্ৰমাণ কৰা যে,  $a + b = a' + b'$  আৰু  $ab - h^2 = a'b' - h'^2$ .

- (b) Find the polar equation of the conic in the following form : 5

তলত দিয়া আকাৰত শঙ্কৰৰ প্ৰস্থীয় সমীকৰণ নিৰ্ণয় কৰা :

$$\frac{l}{r} = 1 + e \cos \theta$$

( 7 )

- (c) Find the shortest distance between the following lines : 5

তলৰ ৰেখাযোৰৰ মাজৰ হ্রস্বতম দূৰত্ব নিৰ্ণয় কৰা :

$$\frac{x - \alpha}{l} = \frac{y - \beta}{m} = \frac{z - \gamma}{n}$$

$$\frac{x - \alpha'}{l'} = \frac{y - \beta'}{m'} = \frac{z - \gamma'}{n'}$$

- (d) Find the equation of the right circular cylinder whose axis is the line  $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{6}$  and radius equal to 5. 5

এটা সমচক্ৰীয় বেলনৰ অক্ষৰ সমীকৰণ  $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{6}$  আৰু ব্যাসার্ধ 5 হ'লে, সমীকৰণটো উলিওৱা।

- (e) (i) If  $\nabla = (x^2 + yz)\hat{i} + (y^2 + zx)\hat{j} + (z^2 + xy)\hat{k}$  find its curl at the point (1, 2, 3). 3

যদি

$$\nabla = (x^2 + yz)\hat{i} + (y^2 + zx)\hat{j} + (z^2 + xy)\hat{k}$$

হয়, (1, 2, 3) বিন্দুত ইয়াৰ কাৰ্ল (curl) উলিওৱা।

(ii) If  $\vec{p} = \vec{b} \times \vec{c}$  and  $\vec{q} = \vec{c} \times \vec{a}$ , then prove that  $\vec{p} \times \vec{q}$  is parallel to  $\vec{c}$ . 2

যদি  $\vec{p} = \vec{b} \times \vec{c}$  আৰু  $\vec{q} = \vec{c} \times \vec{a}$  হয়, তেন্তে প্রমাণ কৰা যে  $\vec{p} \times \vec{q}$  ভেক্টৰটো  $\vec{c}$  ৰ সমান্তৰাল।

(f) (i) Show that (দেখুওৱা যে)

$$[\vec{a} \times \vec{b} \quad \vec{b} \times \vec{c} \quad \vec{c} \times \vec{a}] = [\vec{a} \quad \vec{b} \quad \vec{c}]^2 \quad 3$$

(ii) If  $\vec{r} = \vec{a} \cos \omega t + \vec{b} \sin \omega t$ , prove that  $\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} + \omega^2 \vec{r} = 0$ , where  $\vec{a}$  and  $\vec{b}$  are constant vectors and  $\omega$  is a constant. 2

যদি  $\vec{r} = \vec{a} \cos \omega t + \vec{b} \sin \omega t$ , প্রমাণ কৰা যে  $\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} + \omega^2 \vec{r} = 0$ , য'ত  $\vec{a}$  আৰু  $\vec{b}$  ধ্রুবক ভেক্টৰ আৰু  $\omega$  এটা ধ্রুবক।

## PART—IV

( Essay-type questions )

Answer either (a) or (b) from each of the following questions : 10×4=40

তলৰ প্রতিটো প্রশ্নৰ পৰা (a) অথবা (b) ৰ উত্তৰ কৰা :

4. (a) (i) If the equation

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$$

represents a pair of parallel straight

lines, show that  $\frac{a}{h} = \frac{h}{b} = \frac{g}{f}$ . 5

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$$

সমীকৰণে এযোৰ সমান্তৰাল সৰলৰেখাক বুজালে

দেখুওৱা যে  $\frac{a}{h} = \frac{h}{b} = \frac{g}{f}$ .

(ii) When are two circles said to be orthogonal? Prove that the two

circles  $x^2 + y^2 + 2x + 4y - 20 = 0$

and  $x^2 + y^2 + 6x - 8y + 10 = 0$  cut

orthogonally. 5

দুটা বৃত্তক কেতিয়া অভিলম্বীয় বোলা হয়? প্রমাণ

কৰা যে  $x^2 + y^2 + 2x + 4y - 20 = 0$

আৰু  $x^2 + y^2 + 6x - 8y + 10 = 0$  বৃত্ত

দুটাই অভিলম্বীয়কৈ কটাকটি কৰে।

(b) (i) Show that the equation

$$2x^2 + 7xy + 3y^2 + 8x + 14y + 8 = 0$$

represents two straight lines and find the angle between them. 5

$$2x^2 + 7xy + 3y^2 + 8x + 14y + 8 = 0$$

সমীকৰণে এযোৰ সৰলৰেখাক নিৰ্দেশ কৰে। ৰেখা দুডালৰ মাজৰ কোণটো নিৰ্ণয় কৰা।

(ii) If the line  $3x - 2y = 18$  be a tangent to the circle

$$x^2 + y^2 + 5x + 6y - 14 = 0$$

find the point of contact. 5

যদি  $3x - 2y = 18$  ৰেখাডাল

$$x^2 + y^2 + 5x + 6y - 14 = 0$$

বৃত্তৰ এডাল স্পৰ্শক, স্পৰ্শবিন্দুটো নিৰ্ণয় কৰা।

5. (a) (i) Show that the lengths of the semi-axes of the conic

$$ax^2 + 2hxy + ay^2 = d \text{ are } \frac{d}{\sqrt{a+h}} \text{ and}$$

$$\frac{d}{\sqrt{a-h}}. \quad 4$$

$$ax^2 + 2hxy + ay^2 = d \quad \text{শাক্তৰ অর্ধ-}$$

$$\text{অক্ষদ্বয়ৰ দৈৰ্ঘ্য } \frac{d}{\sqrt{a+h}} \text{ আৰু } \frac{d}{\sqrt{a-h}} \text{ বুলি}$$

দেখুওৱা।

(ii) If  $l$  and  $l'$  are the lengths of the two segments of a focal chord, prove that

$$\frac{1}{l} + \frac{1}{l'} = \frac{1}{a}$$

where  $(a, 0)$  is the focus of the conic. 3

কোনো এডাল নাভি-জ্যাৰ অংশ দুটা  $l$  আৰু  $l'$  হ'লে, প্রমাণ কৰা যে

$$\frac{1}{l} + \frac{1}{l'} = \frac{1}{a}$$

য'ত  $(a, 0)$  হ'ল শংকুৰ নাভি।

(iii) Find the condition that the line  $lx + my = n$  touches the ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad 3$$

$$lx + my = n \quad \text{ৰেখাডালে } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

উপবৃত্তক স্পৰ্শ কৰাৰ চৰ্তটো উলিওৱা।

(b) (i) If  $e$  and  $e'$  be the eccentricities of a hyperbola and its conjugate, show

$$\text{that } \frac{1}{e^2} + \frac{1}{e'^2} = 1. \quad 4$$

সংযুগ্ম পৰাবৃত্ত এযোৰৰ উৎকেন্দ্ৰতা  $e$  আৰু  $e'$

হ'লে, প্রমাণ কৰা যে  $\frac{1}{e^2} + \frac{1}{e'^2} = 1$ .

(ii) If  $(at_1^2, 2at_1)$  and  $(at_2^2, 2at_2)$  are the two end-points of a focal chord of the parabola  $y^2 = 4ax$ , prove that  $t_1 t_2 = -1$ .

$y^2 = 4ax$  অধিবৃত্তৰ নাভিলম্বীয় জ্যা এডালৰ দুই মূৰৰ বিন্দু দুটাৰ স্থানাংক  $(at_1^2, 2at_1)$  আৰু  $(at_2^2, 2at_2)$  হ'লে, প্রমাণ কৰা  $t_1 t_2 = -1$ .

(iii) Prove that the lines  $4x - 3y + 40 = 0$  and  $x + 3y - 7 = 0$  are parallel to a pair of conjugate diameters of the ellipse  $4x^2 + 9y^2 = 36$ .

প্রমাণ কৰা যে

$4x - 3y + 40 = 0$  আৰু  $x + 3y - 7 = 0$  ৰেখাদুডাল  $4x^2 + 9y^2 = 36$  উপবৃত্তৰ দুডাল সংযুগ্ম ব্যাসৰ সমান্তৰাল।

6. (a) (i) Find the centre and radius of the following circle :

তলৰ বৃত্তটোৰ কেন্দ্ৰ আৰু ব্যাসার্ধ নিৰ্ণয় কৰা :

$$x^2 + y^2 + z^2 - 8x + 4y + 8z = 45;$$

$$x - 2y + 2z = 18$$

(ii) Prove that every homogeneous equation represents a cone with vertex at the origin.

প্রমাণ কৰা যে এটা সুষম সমীকৰণে মূলবিন্দু শীৰ্ষবিন্দুবিশিষ্ট কোনো শংকু নিৰূপণ কৰে।

(b) (i) A plane passes through a fixed point  $(\alpha, \beta, \gamma)$  and cuts the coordinate axes in  $A, B, C$ . Prove that the locus of the centre of the sphere  $OABC$  is given by

$$\frac{\alpha}{x} + \frac{\beta}{y} + \frac{\gamma}{z} = 2$$

এখন সমতল এটা নিৰ্দিষ্ট বিন্দু  $(\alpha, \beta, \gamma)$  ৰে যায় আৰু অক্ষত্ৰয়ক  $A, B, C$  বিন্দুত ছেদ কৰে। প্রমাণ কৰা যে  $OABC$  গোলকৰ কেন্দ্ৰৰ সঞ্চাৰপথ

$$\frac{\alpha}{x} + \frac{\beta}{y} + \frac{\gamma}{z} = 2$$

(ii) Find the equation of the cone whose vertex is  $(\alpha, \beta, \gamma)$  and guiding curve is  $z = 0, ax^2 + by^2 = 1$ .

এটা শংকুৰ সমীকৰণ উলিওৱা, য'ত শংকুৰ শীৰ্ষবিন্দুৰ স্থানাঙ্ক  $(\alpha, \beta, \gamma)$  আৰু নিৰ্দেশক বক্ৰৰ সমীকৰণ  $z = 0, ax^2 + by^2 = 1$ .

7. (a) (i) Prove that (প্রমাণ কৰা যে)

$$[\vec{a} \vec{b} \vec{c}][\vec{p} \vec{q} \vec{r}] = \begin{vmatrix} \vec{a} \cdot \vec{p} & \vec{a} \cdot \vec{q} & \vec{a} \cdot \vec{r} \\ \vec{b} \cdot \vec{p} & \vec{b} \cdot \vec{q} & \vec{b} \cdot \vec{r} \\ \vec{c} \cdot \vec{p} & \vec{c} \cdot \vec{q} & \vec{c} \cdot \vec{r} \end{vmatrix} \quad 5$$

(ii) A particle is moving along the curve  $x = t^3 + 1$ ,  $y = t^2$  and  $z = 2t + 5$ , where  $t$  is the time. Find the components of its velocity and acceleration at  $t = 1$  in the direction of  $\hat{i} + \hat{j} + 3\hat{k}$ .

5

এটা বস্তুকণাই  $x = t^3 + 1$ ,  $y = t^2$  আৰু  $z = 2t + 5$  বক্রত গতি কৰি আছে, য'ত  $t =$  সময়।  $\hat{i} + \hat{j} + 3\hat{k}$  ৰ দিশত ইয়াৰ বেগ আৰু ত্বৰণৰ উপাংশ নিৰ্ণয় কৰা, যেতিয়া  $t = 1$ .

(b) (i) Show that the necessary and sufficient condition for a scalar point function  $f(x, y, z)$  to be constant is that  $\Delta s = 0$ .

5

দেখুওৱা যে  $f(x, y, z)$  আধাৰত স্কেলাৰ বিন্দু ফলনত ধ্ৰুৱ হ'বলৈ প্ৰয়োজনীয় আৰু পৰ্যাপ্ত চৰ্ত হ'ল  $\Delta s = 0$ .

(ii) If

$$\vec{f} = x^2 y \hat{i} - 2zx \hat{j} + zx \hat{j} + 2yz \hat{k}$$

find—

(1)  $\text{div } \vec{f}$

(2)  $\text{curl } \vec{f}$

2+3

যদি

$$\vec{f} = x^2 y \hat{i} - 2zx \hat{j} + zx \hat{j} + 2yz \hat{k}$$

তেন্তে

(1)  $\text{div } \vec{f}$

(2)  $\text{curl } \vec{f}$

উলিওৱা।

\*\*\*