

2014

MATHEMATICS

(General)

Full Marks : 80

Time : 3 hours

The figures in the margin indicate full marks
for the questions

Answer either in English or in Assamese

1. Answer the following questions : 1×10=10

তলত দিয়া প্ৰশ্নবোৰৰ উত্তৰ কৰা :

- (a) Let f be continuous and g be discontinuous at a point c . Is $f + g$ continuous at c ?

c বিন্দুত f ফলনটো অবিচ্ছিন্ন আৰু g ফলনটো অবিচ্ছিন্ন নহয়। $f + g$ ফলনটো c বিন্দুত অবিচ্ছিন্ন হয়নে?

- (b) Write the $(n-1)$ th derivative of x^n .

x^n ফলনটোৰ $(n-1)$ তম অৱকলজ লিখা।

- (c) Fill in the blank :

খালী ঠাই পূৰণ কৰা :

Leibnitz's theorem is used to find the n th derivative of — of two functions.

লিবনিজৰ উপপাদ্যৰ সহায়ত দুটা ফলনৰ — ৰ n তম অৱকলজ উলিওৱা হয়।

(d) Write the value of

মান লিখা :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - b^x}{x}$$

(e) Can the function $f(x) = \sqrt{x}$ be expanded in ascending powers of x by Maclaurin's theorem?

$f(x) = \sqrt{x}$ ফলনটো মেল্ল'বিগৰ উপপাদ্যৰ সহায়ত x ৰ অসীম ঘাত শ্ৰেণীত প্ৰকাশ কৰিব পাৰিনে ?

(f) Write down one necessary condition for the function f to have an extreme value at the point $x = c$.

f ফলনটোৰ $x = c$ বিন্দুত চৰম মান থকাৰ বাবে এটা আৱশ্যকীয় চৰ্ত লিখা।

(g) If $f(x, y) = e^{x^2 + xy + y^2}$, then find the value of f_x .

যদি $f(x, y) = e^{x^2 + xy + y^2}$ হয়, তেন্তে f_x ৰ মান উলিওৱা।

(h) State Euler's theorem on homogeneous function of two variables.

দুটা চলকবিশিষ্ট সমঘাত ফলন এটাৰ বাবে অয়লাৰৰ উপপাদ্যটো লিখা।

(i) Examine whether $f(x, y) = 3x^2 - y^2 + x^3$ has a stationary point at $(-2, 0)$.

$f(x, y) = 3x^2 - y^2 + x^3$ ফলনটোৰ $(-2, 0)$ বিন্দুত এটা স্থিৰ বিন্দু আছেনে পৰীক্ষা কৰা।

(j) Find the radius of curvature of $s = 4a \sin \psi$ at any point (s, ψ) .

$s = 4a \sin \psi$ ফলনটোৰ (s, ψ) বিন্দুত বক্রতা ব্যাসার্ধ উলিওৱা।

2. Answer the following questions :

তলত দিয়া প্ৰশ্নবোৰৰ উত্তৰ কৰা :

(a) Examine the continuity of the following function at $x = 2$:

তলত দিয়া ফলনটোৰ $x = 2$ বিন্দুত অবিচ্ছিন্নতা পৰীক্ষা কৰা :

$$f(x) = \begin{cases} 1+x, & x \leq 2 \\ 5-x, & x > 2 \end{cases}$$

(b) Explain geometrical interpretation of Lagrange's mean value theorem.

লাগ্ৰাঞ্জৰ মধ্যমান উপপাদ্যৰ জ্যামিতিক ব্যাখ্যা দিয়া।

(c) Show that $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$ does not exist.

দেখুওৱা যে $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$ স্থিত নহয়।

(d) Find the asymptotes of the curve

$$x^2 y^2 = a^2 y^2 + b^2 x^2$$

which are (i) parallel to x -axis and (ii) parallel to y -axis.

2+2=4

$x^2 y^2 = a^2 y^2 + b^2 x^2$ বক্রৰ অনন্তস্পৰ্শী ৰেখাৰ

সমীকৰণ উলিওৱা, যিবোৰ (i) x -অক্ষৰ সমান্তৰাল আৰু

(ii) y -অক্ষৰ সমান্তৰাল।

(4)

3. (a) If $y = \tan^{-1} x$, then show thatযদি $y = \tan^{-1} x$ হয়, তেন্তে দেখুওৱা যে

(i) $(1+x^2)y_2 + (2x-1)y_1 = 0$;

(ii) $(1+x^2)y_{n+2} + (2nx+2n-1)y_{n+1} + n(n+1) = 0$
2+3=5

Or / অথবা

If the line $x \cos \alpha + y \sin \alpha = p$ is a normal to the curve $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, then show that

$$\frac{a^2}{\cos^2 \alpha} + \frac{b^2}{\sin^2 \alpha} = \frac{(a^2 - b^2)^2}{p^2} \quad 5$$

যদি $x \cos \alpha + y \sin \alpha = p$ ৰেখাডাল $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

বক্রৰ এডাল অভিলম্ব হয়, তেন্তে দেখুওৱা যে

$$\frac{a^2}{\cos^2 \alpha} + \frac{b^2}{\sin^2 \alpha} = \frac{(a^2 - b^2)^2}{p^2}$$

(b) Expand $\cos x$ in ascending powers of x using Maclaurin's infinite series. 5মেক্ল'ৰিণৰ অসীম শ্ৰেণী ব্যৱহাৰ কৰি $\cos x$ ক x ৰ অসীম ঘাত শ্ৰেণীত প্ৰসাৰ কৰা।

(c) Verify Euler's theorem for the function

$$z = ax^2 + 2hxy + by^2 \quad 5$$

 $z = ax^2 + 2hxy + by^2$ ফলনটোৰ ক্ষেত্ৰত অয়লাৰৰ উপপাদ্যটো প্ৰতিষ্ঠা কৰা।

(5)

Or / অথবা

Show that the function

$$f(x, y) = xy(2 - x - y)$$

has a maximum value at $(\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$. Also find the maximum value. 4+1=5দেখুওৱা যে $f(x, y) = xy(2 - x - y)$ ফলনটোৰ $(\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$ বিন্দুত গৰিষ্ঠ মান আছে। লগতে গৰিষ্ঠ মানটো উলিওৱা।(d) Find the radius of curvature at any point (r, θ) of the cardioid $r = a(1 - \cos \theta)$. 5 $r = a(1 - \cos \theta)$ কাৰ্ডিয়ডটোৰ (r, θ) বিন্দুত বক্রতা ব্যাসার্ধ উলিওৱা।4. (a) Prove that $\int_0^a f(x) dx = \int_0^a f(a-x) dx$.

Using property of definite integral, evaluate the following : 3+4+3=10

প্ৰমাণ কৰা যে $\int_0^a f(x) dx = \int_0^a f(a-x) dx$. নিশ্চিত

অনুকলনৰ ধৰ্ম ব্যৱহাৰ কৰি তলত দিয়াবোৰৰ মান উলিওৱা :

(i) $\int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx$

(ii) $\int_0^{\pi/2} \log \tan x dx$

(6)

Or / অথবা

Obtain the reduction formula for $\int_0^{\pi/4} \tan^n x dx$. Hence evaluate the following :

$$4+3+3=10$$

$\int_0^{\pi/4} \tan^n x dx$ ব লঘুকৰণ সূত্র নিৰ্ণয় কৰা। ইয়াৰ পৰা

তলত দিয়াবোৰৰ মান উলিওৱা :

$$(i) \int_0^{\pi/4} \tan^5 x dx$$

$$(ii) \int_0^{\pi/4} \tan^6 x dx$$

(b) (i) Find the area enclosed by the parabolas $y^2 = 4ax$ and $x^2 = 4by$. 5

$y^2 = 4ax$ আৰু $x^2 = 4by$ অধিবৃত্ত দুটাই
আগুৰা ক্ষেত্রৰ কালি উলিওৱা।

Or / অথবা

Find the length of an arc of the cycloid $x = a(\theta - \sin \theta)$, $y = a(1 - \cos \theta)$.

$x = a(\theta - \sin \theta)$, $y = a(1 - \cos \theta)$ চাই-
ক্লয়ডটোৰ এটা সম্পূৰ্ণ ধনুচাপৰ দৈৰ্ঘ্য উলিওৱা।

(ii) Find the equation of the curve whose slope at any point is equal to $2x + 3y$ and which passes through the origin. 5

মূলবিন্দুৰ মাজেৰে যোৱা আৰু $2x + 3y$ প্রৱণতা-
বিশিষ্ট বক্রটোৰ সমীকৰণ উলিওৱা।

(7)

(c) (i) Solve : 4

সমাধান কৰা :

$$(e^x + 1)y dy = (y + 1)e^x dx$$

(ii) Reduce the following differential equation to homogeneous form and then solve it : 2+4=6

তলৰ অৱকল সমীকৰণটো সমঘাত ৰূপলৈ নিয়া আৰু
সমাধান কৰা :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{6x - 2y - 7}{2x + 3y - 6}$$

Or / অথবা

(i) Write the general solution of the Clairaut's equations $y = px + p - p^2$. 1

ক্লেইবটৰ আৰ্হিৰ সমীকৰণ $y = px + p - p^2$ ৰ
সাধাৰণ সমাধান লিখা।

(ii) Show that $e^{\int P dx}$ is the integrating factor of the linear differential equation $\frac{dy}{dx} + Py = Q$, where P, Q are functions of x alone or constant. 4

দেখুওৱা যে, $\frac{dy}{dx} + Py = Q$ বৈখিক অৱকল

সমীকৰণটোৰ বাবে $e^{\int P dx}$ এটা অনুকলন গুণক,
য'ত P, Q, x ৰ ফলন অথবা প্ৰৱক।

(iii) Is the equation

$$x(x^2 + y^2 - a^2)dx + y(x^2 - y^2 - b^2)dy = 0$$

exact? Solve it.

2+3=5

$$x(x^2 + y^2 - a^2)dx + y(x^2 - y^2 - b^2)dy = 0$$

সমীকরণটো যথার্থ হয়নে? ইয়াক সমাধান কৰা।

(d) Solve any two of the following : 5×2=10

তলৰ যি কোনো দুটাৰ সমাধান উলিওৱা :

(i) $\frac{d^3y}{dx^3} - 6\frac{d^2y}{dx^2} + 11\frac{dy}{dx} - 6y = e^{2x}$

(ii) $\frac{d^2y}{dx^2} - 4\frac{dy}{dx} + 5y = \sin x$

(iii) $\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$, given that (দিয়া আছে)

$y = 2$, when (যেতিয়া) $x = 0$, $y = -2$

when (যেতিয়া) $x = \pi/2$.

(iv) $x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} - y = x^3$

★ ★ ★