

Total No. of printed pages = 9

3 (Sem 2) MAT

2015

**MATHEMATICS**

**(General)**

Full Marks – 60

Time – 2½ hours

The figures in the margin indicate full marks for the questions.

Answer either in English or in Assamese.

উত্তৰ ইংৰাজী অথবা অসমীয়াত কৰিবা।

**PART – I**

(Objective type questions)

1. Answer the following questions :  $1 \times 7 = 7$

তলত দিয়া প্ৰশ্নবোৰৰ উত্তৰ দিয়া :

(a) Give an example of a non-abelian group.

এটা অক্ৰমবিনিমেয় সংঘৰ উদাহৰণ দিয়া।

(b) Give an example of a ring which is not a field.

এনেকুৱা বলয় এটাৰ উদাহৰণ দিয়া যি এটা ক্ষেত্ৰ নহয়।

[Turn over

PART – II

(Very short answer type questions)

- (c) Let  $G$  be a group and  $a \in G$ . Show that  $(a^{-1})^{-1} = a$

$G$  এটা সংঘ আৰু  $a \in G$  হ'লে দেখুওৱা যে  $(a^{-1})^{-1} = a$

- (d) Write true or false :

“A Boolean ring is commutative.”

তলৰ বাক্যটো শুদ্ধ নে ভুল লিখা :

“বুলিয়ান বলয় এটা ক্ৰমবিনিমেয় হয়।”

- (e) Find the rank of the matrix :

তলৰ মেট্ৰিকটোৰ কোটি উলিওৱা :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & \dots & 1 \end{pmatrix}_{m \times n}$$

- (f) Let  $A$  be a square matrix of order  $n$  and  $A^{-1}$  exists. Then what is the rank of  $A$  ?

$A$  যদি  $n$  মাত্ৰাৰ বৰ্গীয় মেট্ৰিক হয় আৰু  $A^{-1}$  স্থিত হয়, তেনেহ'লে  $A$  ৰ কোটি কি হ'ব?

- (g) If  $D = \text{diag}(d_1, d_2, \dots, d_n)$ . Where  $d_1, d_2, \dots, d_n \neq 0$ , then find  $D^{-1}$ .

যদি  $D = \text{diag}(d_1, d_2, \dots, d_n)$  আৰু  $d_1, d_2, \dots, d_n \neq 0$ , তেনেহ'লে  $D^{-1}$  উলিওৱা।

2. Answer the following questions :  $2 \times 4 = 8$

তলত প্ৰশ্নবোৰৰ উত্তৰ লিখা :

- (a) Let  $G = \{x \in \mathbb{C} : x^4 = 1\}$ . Show that  $G$  is an abelian group with respect to the multiplication of complex numbers.

ধৰা  $G = \{x \in \mathbb{C} : x^4 = 1\}$ । দেখুওৱা যে জটিল সংখ্যাৰ পূৰণ সাপেক্ষে  $G$  এটা ক্ৰমবিনিমেয় সংঘ।

- (b) “Union of two subgroups is again a subgroup.” Establish by an example that the above statement is false.

এটা উদাহৰণৰ সহায়ত তলৰ বাক্যটি ভুল বুলি প্ৰতিপন্ন কৰা :

“দুটা উপসংঘৰ মিলন আকৌ এটা উপসংঘ হ'ব।”

- (c) Show that in an integral domain the cancellation laws hold.

দেখুৱা যে এটা পূৰ্ণাংকীয় ৰাষ্ট্ৰত কটাকটি প্ৰক্ৰিয়া খাটে।

- (d) If  $A$  is a  $2 \times 2$  matrix and  $A = \text{adj}A$ , then show

that  $A$  is of the form  $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$

যদি  $A$  এটা  $2 \times 2$  মেট্রিক্স হয় আৰু  $A = \text{adj}A$ ,  
তেনেহলে প্রমাণ কৰা যে  $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$  আকাৰৰ হ'ব।

### PART - III

(Short answer type questions)

3. Answer any *three* questions :  $5 \times 3 = 15$

তলৰ যি কোনো তিনিটা প্ৰশ্নৰ উত্তৰ লিখা :

(a) Show that the order of a subgroup of a finite group  $G$  is a divisor of the order of the group.

দেখুৱা যে যদি  $H$  এটা সসীম সংঘ  $G$  ৰ উপসংঘ হয়, তেনেহলে  $O(H)$ ,  $O(G)$  ৰ উৎপাদক হ'ব।

(b) Show that the set of all even permutations on  $S = \{1, 2, 3, \dots, n\}$  is a subgroup of the permutation group  $S_n$ .

দেখুৱা যে  $S = \{1, 2, 3, \dots, n\}$  ৰ যুগ্ম বিন্যাসৰ সংহতিটো বিন্যাস সংঘ  $S_n$  ৰ উপসংঘ হ'ব।

(c) Let  $G$  be a group and  $a \in G$ . Let  $f : G \rightarrow G$  be given by  $f(x) = axa^{-1}$  for every  $x \in G$ . Then show that  $f$  is an isomorphism.

ধৰা হ'ল  $G$  এটা সংঘ আৰু  $a \in G$ । ধৰা হ'ল  $f : G \rightarrow G$  ক এনেদৰে দিয়া হৈছে :  $f(x) = axa^{-1}$ ,  $\forall x \in G$  দেখুৱা যে  $f$  এটা সমাকপতা হয়।

11/3(Sem 2) MAT (4)

(d) Prove that the set  $Z[i] = \{a + bi : a, b \in \mathbb{Z}\}$  is a ring under the usual addition and multiplication of complex numbers.

প্রমাণ কৰা যে জটিল সংখ্যাৰ যোগ আৰু পূৰণফল সাপেক্ষে সংহতি  $Z[i] = \{a + bi : a, b \in \mathbb{Z}\}$  এটা বলয় গঠন কৰে।

(e) If  $A$  and  $B$  are two non-singular square matrices of the same order, then show that  $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ .

যদি  $A$  আৰু  $B$  একে মাত্ৰাৰ বৰ্গীয় মৌলিকমুক্ত হয় আৰু  $A^{-1}$ ,  $B^{-1}$  স্থিত হয়, তেনেহলে দেখুৱা যে  $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ .

### PART - IV

Answer either (a) and (b) or (c) and (d) from each of the following questions :  $10 \times 3 = 30$

তলত দিয়া প্ৰশ্নবোৰৰ হয় (a) আৰু (b) নহলে (c) আৰু (d)ৰ উত্তৰ দিয়া :

4. (a) A non-empty subset  $H$  of a group  $G$  is a subgroup of  $G$  if and only if  $ab^{-1} \in H$  for every  $a, b \in H$ . Prove this. 5

প্রমাণ কৰা যে সংঘ  $G$  ৰ অধিকৃত উপসংহতি  $H$  সংঘটোৰ উপসংঘ হ'ব যদি আৰু যদিহে  $ab^{-1} \in H$ ,  $\forall a, b \in H$

11/3(Sem 2) MAT (5)

[Turn over

(b) Let  $G = \{-1, 1\}$ , which is a group under multiplication. Let  $f : Z \rightarrow G$  be given by

$$f(n) = \begin{cases} 1 & \text{if } n \text{ is even} \\ -1 & \text{if } n \text{ is odd} \end{cases}$$

Show that  $f$  is an onto homomorphism and find  $\ker f$ . 5

ধৰা  $G = \{-1, 1\}$  যি পূৰণ সাপেক্ষে এটা সংঘ। ফলন  $f : Z \rightarrow G$  ক তলত দিয়া দৰে সংজ্ঞাবদ্ধ কৰা হৈছে :

$$f(n) = \begin{cases} 1 & \text{যদি } n \text{ যুগ্ম হয়} \\ -1 & \text{যদি } n \text{ অযুগ্ম হয়} \end{cases}$$

প্রমাণ কৰা যে  $f$  এটা আচ্ছাদক অনুৰূপতা,  $\ker f$  ও নিৰ্ণয় কৰা।

(c) Let  $G$  be a group and  $H \leq G$ ,  $a, b \in G$ . Then show that 5

(i)  $aH = H \Leftrightarrow a \in H$

(ii)  $aH = bH \Leftrightarrow a^{-1}b \in H$

ধৰা  $G$  এটা সংঘ আৰু  $H \leq G$ ,  $a, b \in G$  প্রমাণ কৰা যে

(i)  $aH = H \Leftrightarrow a \in H$

(ii)  $aH = bH \Leftrightarrow a^{-1}b \in H$

(d) If  $\mathbb{R}^+$  is the multiplicative group of positive real numbers, then show that  $(\mathbb{R}^+, \cdot) \not\cong (\mathbb{R}, +)$  5

যদি  $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$  আৰু  $\mathbb{R}^+$  পূৰণ সাপেক্ষে এটা সংঘ। দেখুৱা যে  $(\mathbb{R}^+, \cdot) \not\cong (\mathbb{R}, +)$

5. (a) Define a ring. If  $R$  is a ring such that  $x^3 = x$  for every  $x \in R$ , then show that  $R$  is commutative. 5

বলয়ৰ সংজ্ঞা লিখা।  $R$  এটা বলয় য'ত  $x^3 = x$ ,  $x \in R$ , তেনেহ'লে দেখুৱা যে  $R$  এটা ক্রমবিনিমেয় বলয় হয়।

(b) Show that an integral domain need not be a field. Also show that a finite integral domain is a field. 5

দেখুৱা যে এটা পূৰ্ণাংকীয় ৰাষ্ট্ৰ এটা ক্ষেত্ৰ নহ'বও পাৰে। আকৌ দেখুৱা যে সসীম পূৰ্ণাংকীয় ৰাষ্ট্ৰ এটা ক্ষেত্ৰ হয়।

(c) Let  $F$  denote the set of all mappings  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  such that  $f$  is continuous. Define : 5

For  $f, g \in F$ ,  $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ ,

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x), x \in \mathbb{R}$$

Show that  $\langle F, +, \cdot \rangle$  is a commutative ring with unity.

ধৰা  $F$  এটা  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  অবিচ্ছিন্ন ফলনবোৰৰ সংহতি।  
ইয়াত  $+$ ,  $\cdot$  তলত দিয়া দৰে সংজ্ঞাবদ্ধ কৰা হৈছে।

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x),$$

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x), x \in \mathbb{R}, f, g \in F$$

দেখুৱা যে  $(F, +, \cdot)$  এটা একক মৌল বিশিষ্ট ক্ৰমবিনিমেয়  
বলয়।

- (d) Show that a ring  $R$  is without zero divisors  
if and only if for  $a, b, c \in R$ ,  $ab = ac$ ,  $a \neq 0$   
imply  $b = c$ . 5

দেখুৱা যে  $R$  বলয় এটা শূন্য ভাজকবিহীন হ'ব যদি আৰু  
যদিহে  $a, b, c \in R$ ,  $ab = ac$ ,  $a \neq 0 \Rightarrow b = c$

6. (a) If  $A$  and  $B$  are square matrices of order  $n$ ,  
then show that  $\text{adj}(AB) = \text{adj}B \cdot \text{adj}A$ . 5

যদি  $A$  আৰু  $B$  উভয়েই  $n$  মাত্ৰাৰ বৰ্গাকাৰ মৌলকক্ষ  
হয়, তেনেহলে দেখুৱা যে  $\text{adj}(AB) = \text{adj}B \cdot \text{adj}A$

- (b) Find the rank of the matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

by reducing it to Echelon form. 5

Echelon আকাৰত প্ৰকাশ কৰি উপৰোক্ত মৌলকক্ষ  
 $A$ ৰ কোটি নিৰ্ণয় কৰা।

- (c) Solve by matrix method :

মৌলকক্ষ পদ্ধতিৰ সহায়ত সমাধান কৰা :

$$x + y + z = 6$$

$$x - y + z = 2$$

$$2x + y - z = 1$$

- (d) For the matrix  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}_{2 \times 2}$  verify that

$$|\text{adj}A| \cdot |A| = |A|^2 \quad 5$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}_{2 \times 2} \text{ মৌলকক্ষৰ বাবে } |\text{adj}A| \cdot |A| = |A|^2$$

সত্যাপন কৰা।