Total No. of printed pages = 16

3 (Sem 6) MAT 1

2015

MATHEMATICS

Paper : E-6.3

Full Marks – 80

Time – Three hours

The figures in the margin indicate full marks for the questions.

Answer either in English or in Assamese.

1. Choose the correct option for each of the following multiple choice questions : 1×8=8

তলৰ বহু বাছনিভুক্ত প্ৰশ্নাৱলীৰ প্ৰতিটোৰ শুদ্ধ উত্তৰটো বাছি উলিওৱা ঃ

(i) Let K be a subfield of a field F. Then

ধৰা হ'ল, ক্ষেত্ৰ Fৰ K এটা উপক্ষেত্ৰ। তেতিয়া—

(a) K is a vector space over F

K, ক্ষেত্ৰ Fৰ ওপৰত এক ৰৈখিক স্থান

(b) F is a vector space over K

F, উপক্ষেত্ৰ Kৰ ওপৰত এক ৰৈখিক স্থান

[Turn over

(c) F is not a vector space over K

F, উপক্ষেত্ৰ Kৰ ওপৰত ৰৈখিক স্থান নহয়

(d) F is not a vector space over F

F, ক্ষেত্ৰ Fৰ ওপৰত ৰৈখিক স্থান নহয়।

(ii) Let V be a vector space over a field F. Then for any two subspaces W_1 and W_2 of V.

ধৰা হ'ল, ক্ষেত্ৰ Fৰ ওপৰত V এক ৰৈখিক স্থান। তেতিয়া Vৰ যিকোনো দুটা ৰৈখিক উপস্থান W_1 আৰু W_2ৰ বাবে

(a) $W_1 \cup W_2$ is again a subspace of V

$W_1 \cup W_2$, Vৰ এক ৰৈখিক উপস্থান

(b) $W_1 \cap W_2$ may not be a subspace of V

$W_1 \cap W_2$,Vৰ এক ৰৈখিক উপস্থান নহবও পাৰে

(c) $W_1 \cap W_2$ is always a subspace of V

$W_1 \cap W_2$,Vৰ সদায় এক ৰৈখিক উপস্থান

(d) $W_1 \cup W_2$ is a subspace of V if $W_1 \not\subseteq W_2$ or $W_2 \not\subseteq W_1$

$W_1 \cup W_2$, Vৰ এক ৰৈখিক উপস্থান হ'ব যদি $W_1 \not\subseteq W_2$ বা $W_2 \not\subseteq W_1$

(iii) Let V be a finite dimensional vector space over a field F. Then

ধৰা হ'ল V, ক্ষেত্ৰ Fৰ ওপৰত এক সসীম মাত্ৰাৰ ৰৈখিক স্থান। তেতিয়া—

(a) there is one and only one basis for V,

Vৰ এটা আৰু মাত্ৰ এটাহে ভূমি আছে,

(b) there exist more than one basis with each basis having distinct number of elements,

Vৰ একাধিক ভূমি আছে যিবোৰৰ মৌলসংখ্যা পৰস্পৰ পৃথক,

(c) there exist more than one basis with exactly the same number of elements,

Vৰ একাধিক ভূমি আছে যিবোৰৰ মৌলসংখ্যা পৰস্পৰ সমান,

(d) there exists a basis with infinite number of elements.

Vৰ এটা ভূমি আছে যাৰ মৌলসংখ্যা অসীম।

(iv) Let V be any vector space over a field F and S, T be any two subsets of V. Then

ধৰা হ'ল, ক্ষেত্ৰ Fৰ ওপৰত V এক ৰৈখিক স্থান আৰু S, T Vৰ যিকোনো দুটা উপসংহতি। তেতিয়া—

(a) $L(S \cup T) \subseteq L(S) + L(T)$

(b) $L(S \cup T) \supseteq L(S) + L(T)$

(c) $L(S \cup T) = L(S) + L(T)$

(d) $L(S \cap T) = L(S) + L(T)$

(v) If W_1 and W_2 are any two subspaces of a finite dimensional vector space V(F) over a field F, then

যদি F ক্ষেত্ৰৰ ওপৰত এক বৈখিক স্থান V(F)ৰ W_1 আৰু W_2 যিকোনো দুটা বৈখিক উপস্থান, তেন্তে

(a) $\dim(W_1 + W_2) > \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 \cap W_2)$

(b) $\dim(W_1 + W_2) < \dim W_1 + \dim W_2 + \dim(W_1 \cup W_2)$

(c) $\dim(W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 + \dim(W_1 \cup W_2)$

(d) $\dim(W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 \cap W_2)$

(vi) If n vectors span a vector space V containing r linearly independent vectors, then

r সংখ্যক বৈখিকভাৱে স্বতন্ত্ৰ ভেক্টৰযুক্ত এক বৈখিক স্থান Vক nটা ভেক্টৰে বৈখিকভাৱে বিস্তাৰ কৰিলে

(a) $r > n$ (b) $r \geq n$

(c) $r < n$ (d) $r \leq n$

(vii) For a complex function $w = f(z) = u(x,y) + iv(x, y)$ to be analytic, the conditions

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \text{ and } \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x} \text{ are}$$

এটা জটিল ফলন $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ বৈশ্লেষিক হোৱাৰ

বাবে $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ আৰু $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x}$ চৰ্ত দুটা—

(a) necessary, not sufficient,

প্ৰয়োজনীয়, কিন্তু পৰ্যাপ্ত নহয়,

(b) sufficient, not necessary,

পৰ্যাপ্ত, কিন্তু প্ৰয়োজনীয় নহয়,

(c) both necessary and sufficient,

প্ৰয়োজনীয়, লগতে পৰ্যাপ্ত,

(d) neither necessary nor sufficient.

প্ৰয়োজনীয়ও নহয়, পৰ্যাপ্তও নহয়।

(viii) Let f(z) be analytic in a region bounded by two simple closed curves C and C_1, where C_1 lies inside C. Then

ধৰা হ'ল, f(z) দুটা সৰলভাৱে বন্ধ বক্ৰ C আৰু C_1ৰ দ্বাৰা আবদ্ধ ক্ষেত্ৰৰ বৈশ্লেষিক হোৱা এটা জটিল ফলন, য'ত C_1, Cৰ অন্তৰ্ভুক্ত। তেতিয়া—

(a) $\oint_C f(z)dz > \oint_{C_1} f(z)dz$

(b) $\oint_C f(z)dz < \oint_{C_1} f(z)dz$

(c) $\oint_C f(z)dz = \oint_{C_1} f(z)dz = 2\pi$

(d) $\oint_C f(z)dz = \oint_{C_1} f(z)dz$

2. (a) Attempt any *two* parts of the following : 2×2=4

তলৰ যিকোনো দুটা অংশৰ উত্তৰ উলিয়াবলৈ চেষ্টা কৰা ঃ

(i) Let V(F) be a vector space over a field F. If O and $\bar{O}$ denote the zeros of F and V respectively, then prove that

$a\bar{O} = \bar{O}$ and $O\alpha = \bar{O}$ $\forall a \in F, \forall \alpha \in V$

ক্ষেত্ৰ Fৰ ওপৰত V(F) এক ৰৈখিক স্থান ধৰা হ'ল। যদি O আৰু $\bar{O}$ যথাক্ৰমে ক্ষেত্ৰ F আৰু ৰৈখিক স্থান V(F)ৰ শূন্য হয়, তেন্তে প্ৰমাণ কৰা যে—

$a\bar{O} = \bar{O}$ আৰু $O\alpha = \bar{O}$ $\forall a \in F, \forall \alpha \in V$

(ii) If W_1 and W_2 be two subspaces of a vector space V(F) then prove that

$W_1 + W_2 = \{w_1 + w_2 \mid w_1 \in W_1, w_2 \in W_2\}$
is a subspace of V(F).

W_1 আৰু W_2 এটা ৰৈখিক স্থান V(F)ৰ দুটা ৰৈখিক উপস্থান হ'লে প্ৰমাণ কৰা যে—

$W_1 + W_2 = \{w_1 + w_2 \mid w_1 \in W_1, w_2 \in W_2\}$
ও V(F)ৰ দুটা ৰৈখিক উপস্থান হ'ব।

(iii) Express, if possible, the vector (1, 3, 2) as a linear combination of the vectors (1, –7, –8) and (2, 1, –1) in the vector space $\mathbb{R}^3$ ($\mathbb{R}$).

সম্ভৱ হ'লে ৰৈখিক স্থান $\mathbb{R}^3$ ($\mathbb{R}$)ৰ (1, 3, 2) ভেক্তৰটোক (1, –7, –8) আৰু (2, 1, –1) ভেক্তৰ দুটাৰ ৰৈখিক জোঁট হিচাপে প্ৰকাশ কৰা।

(b) Attempt any *four* parts of the following : 2×4=8

তলৰ যিকোনো চাৰিটা অংশৰ উত্তৰ নিৰ্ণয় কৰা ঃ

(i) Using the definition of exponential function $e^z = e^{x+iy} = e^x (\cos y + i \sin y)$ establish that $e^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^{z_1 + z_2}$ where $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$ are any two complex numbers and e is the Euler's number.

জটিল সংখ্যাৰ বাবে সূচকীয় ফলনৰ সংজ্ঞা $e^z = e^{x+iy} = e^x (\cos y + i \sin y)$ ব্যৱহাৰ কৰি প্ৰতিষ্ঠা কৰা যে, $e^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^{z_1 + z_2}$

য'ত $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$ যিকোনো দুটা জটিল সংখ্যা আৰু e অয়লাৰৰ সংখ্যা।

(ii) Evaluate (মান উলিওৱা)

$$\lim_{z \to -2i} \frac{(2z+3)(z-1)}{z^2 - 2z + 4}$$

(iii) Find all points of discontinuity for the function.

জটিল ফলনটোৰ আটাইবোৰ বিচ্ছিন্ন বিন্দু নিৰ্ণয় কৰা।

$$f(z) = \frac{2z-3}{z^2+2z+2}, \; z \in \mathbb{C}$$

(iv) Compute $f'(z)$ at $z = -1$ from definition if $f(z) = z^3 - 2z$

সংজ্ঞাৰ পৰা $f(z) = z^3 - 2z$ ৰ ফলনটোৰ $z = -1$ বিন্দুত $f'(z)$ নিৰ্ণয় কৰা।

(v) Applying Cauchy's theorem compute $\int_C f(z)dz$

where $f(z) = z^3 - i z^2 - 5z + 2i$ and C is the circle $|z| = 1$.

'কচি'ৰ উপপাদ্য প্ৰয়োগ কৰি $\int_C f(z)dz$ৰ মান উলিওৱা, য'ত $f(z) = z^3 - i z^2 - 5z + 2i$ আৰু Cয়ে $|z| = 1$ বৃত্তক বুজায়।

(vi) Using Cauchy's Integral formula, find

$$\int_C \frac{e^z}{z-2} dz$$

if C is the circle $|z| = 3$

'কচি'ৰ সমাকল সূত্ৰৰ প্ৰয়োগেৰে

$\int_C \frac{e^z}{z-2} dz$ৰ মান উলিওৱা,

য'ত Cয়ে বৃত্ত $|z| = 3$ ক নিৰ্দেশ কৰে।

3. (a) Attempt any *four* parts of the following : 5×4=20

তলৰ যিকোনো চাৰিটা অংশৰ উত্তৰ নিৰ্ণয় কৰা ঃ

(i) Show that $V_2(\mathbb{R}) = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ is a vector space over $\mathbb{R}$ with respect to the addition and scalar multiplication defined respectively as follows–

দেখুওৱা যে, $V_2(\mathbb{R}) = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$য়ে ক্ষেত্ৰ $\mathbb{R}$ ৰ ওপৰত এক ৰৈখিক স্থান নিৰ্দেশ কৰে য'ত ভেক্তৰৰ যোগ আৰু স্কেলাৰৰ পূৰণৰ সংজ্ঞা যথাক্ৰমে নিম্নোক্ত ধৰণে আগবঢ়োৱা হৈছে—

$$(x_1, y_1)+(x_2, y_2) = (x_1+x_2,\ y_1+y_2),$$

$$c(x, y) = (cx, cy),\ (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x, y) \in V_2(\mathbb{R})\quad c \in \mathbb{R},$$

where $\mathbb{R}$ denotes the set of real numbers.

(ii) Define linear span L(S) of a non-empty subset S of a vector space V(F). Prove that L(S) is a subspace of V(F).

ৰৈখিক স্থান V(F)ৰ অৰিক্ত সংহতি Sৰ ৰৈখিক বিস্তাৰ L(S)ৰ সংজ্ঞা আগবঢ়োৱা। প্ৰমাণ কৰা যে, L(S), V(F)ৰ এক ৰৈখিক উপস্থান।

(iii) Show that the three vectors (1, 1, –1), (2, –3, 5) and (–2, 1, 4) of the vector space $\mathbb{R}^3$ over $\mathbb{R}$ are linearly independent.

দেখুওৱা যে ক্ষেত্ৰ $\mathbb{R}$ৰ ওপৰত সংজ্ঞাবদ্ধ ৰৈখিক স্থান $\mathbb{R}^3$ৰ অন্তৰ্ভুক্ত (1, 1, –1), (2, –3, 5) আৰু (–2, 1, 4) ভেক্তৰ তিনিটা ৰৈখিকভাৱে স্বতন্ত্ৰ।

(iv) Explain the terms basis and dimension of a vector space V over a field F. Examine if the vectors (1, 1, –1), (2, –3, 5) and (–2, 1, 4) form a basis for the vector space $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$, $\mathbb{R}$ being the field of real numbers.

ক্ষেত্ৰ Fৰ ওপৰত এক ৰৈখিক স্থান Vৰ ভূমি আৰু মাত্ৰাৰ ধাৰণা বুজাই লিখা।

$\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ ৰৈখিক স্থানৰ (1, 1, –1), (2, –3, 5) আৰু (–2, 1, 4) ভেক্তৰ তিনিটাই এটা ভূমি সূচায়নে পৰীক্ষা কৰাঁ য'ত, $\mathbb{R}$ হ'ল বাস্তৱ সংখ্যাৰ ক্ষেত্ৰ।

(v) Determine all eigenvalues and eigenvectors of the matrix

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

মৌলকক্ষ $A = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ৰ আটাইবোৰ আইগেন মান আৰু আইগেন ভেক্তৰ নিৰ্ণয় কৰা।

(vi) Verify Cayley-Hamilton theorem for the square matrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$ and hence compute A^{-1}.

বৰ্গ মৌলকক্ষ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ৰ বাবে কেইলি-হেমিল্টন উপপাদ্যৰ প্ৰত্যায়ন কৰা আৰু ইয়াৰ পৰা A^{-1} উলিওৱা।

(b) Attempt any *two* parts of the following : 5×2=10

তলৰ যিকোনো দুটা অংশৰ উত্তৰ নিৰ্ণয় কৰা ঃ

(i) Prove that if f(z) is integrable along a rectifiable curve C of length L and if there exists a positive number M such that $|f(z)| \le M$ on C, then

$$\left| \int_C f(z)dz \right| \le ML$$

L দৈৰ্ঘ্যযুক্ত আৰু একমুখীকৰণযোগ্য এডাল বক্ৰ Cৰে এটা ফলন f(z) সমাকলযোগ্য হ'লে আৰু Cৰ সকলো বিন্দুৰ ক্ষেত্ৰত যদি এটা ধনাত্মক সংখ্যা M থাকে যাতে $|f(z)| \le M$, তেন্তে প্ৰমাণ কৰা যে,

$$\left| \int_C f(z)dz \right| \le ML$$

(ii) If f(z) is analytic in a simply connected region R, prove that

$$\int_a^b f(z)\, dz$$ is independent of the path joining any two points a and b in R.

এটা সৰলভাৱে সংযুক্ত ক্ষেত্ৰ R অত এটা ফলন f(z) বৈশ্লেষিক হ'লে প্ৰমাণ কৰা যে Rৰ যিকোনো দুটা বিন্দু a আৰু b সংযোগী বক্ৰৰ ওপৰত।

$$\int_a^b f(z)\, dz$$ৰ মান নিৰ্ভৰশীল নহয়।

(iii) Evaluate :

$$\int_i^{2-i} (3xy+iy^2)\, dz$$ along the straight line $x+y-1 = 0$

$x+y-1=0$ সৰলৰেখাৰে $\int_i^{2-i} (3xy+iy^2)\, dz$ৰ মান উলিওৱা।

4. Let U and V be vector spaces over a field F. Define linear transformations

$T_1 : U \to V$ and $T_2 : U \to V$

Prove that the mappings $T_1 + T_2 : U \to V$ given by $(T_1 + T_2)(x) = T_1(x) + T_2(x)$ and $cT : U \to V$ given by $(cT)(x) = c(T(x))$ for $x \in U$ and $c \in F$ are also linear transformations. 2+4+4=10

ধৰা হ'ল, ক্ষেত্ৰ Fৰ ওপৰত U আৰু V দুটা বৈখিক স্থান।

$T_1 : U \to V$ আৰু $T_2 : U \to V$ যিকোনো দুটা বৈখিক ৰূপান্তৰণ। প্ৰমাণ কৰা যে,

$T_1 + T_2 : U \to V$ য'ত $(T_1 + T_2)(x) = T_1(x) + T_2(x)$

আৰু $cT : U \to V$ য'ত $(cT)(x) = c(T(x))$,

$x \in U$ আৰু $c \in F$ ফলন দুটাও বৈখিক ৰূপান্তৰণ।

Or/অথবা

Show that the mapping

$T : V_2(\mathbb{R}) \to V_2(\mathbb{R})$ defined by

$T : (a, b) = (a + b, a - b, b)$

is a linear transformation. Find also the range space R(T) and null space N(T) where $\mathbb{R}$ is the field of real numbers.

দেখুওৱা যে,

$T : V_2(\mathbb{R}) \to V_2(\mathbb{R})$ য'ত $T : (a, b) = (a + b, a - b, b)$ ফলনটো এটা বৈখিক ৰূপান্তৰণ। লগতে ৰূপান্তৰণ Tৰ পৰিসৰ স্থান R(T) আৰু শূন্য স্থান N(T) উলিওৱা, য'ত $\mathbb{R}$ হ'ল বাস্তৱ সংখ্যাৰ ক্ষেত্ৰ।

5. What are the elementary row transformations of a matrix A ? Applying elementary row or column transformations reduce the matrix A to its normal form where 3+7=10

এটা মৌলকক্ষ Aৰ মৌলিক শাৰী ৰূপান্তৰসমূহ কি ? মৌলিক শাৰী অথবা স্তম্ভ ৰূপান্তৰণ প্ৰয়োগ কৰি মৌলকক্ষ Aক প্ৰসামান্য আকাৰত প্ৰকাশ কৰা য'ত

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -2 & -4 \\ 3 & 1 & 3 & -2 \\ 6 & 3 & 0 & -7 \end{bmatrix}$$

Or/অথবা

Define range space R(T) and null space N(T) of a linear transformation $T : U(F) \to V(F)$

Where U(F) and V(F) are vector spaces over a field F. Prove that R(T) is a subspace of V and N(T) is a subspace of U. 1+1+4+4=10

এক ৰৈখিক ৰূপান্তৰণ $T : U(F) \rightarrow V(F)$ৰ বাবে পৰিসৰ স্থান $R(T)$ আৰু শূন্যস্থান $N(T)$ৰ সংজ্ঞা আগবঢ়োৱা য'ত $U(F)$ আৰু $V(F)$, ক্ষেত্ৰ Fৰ ওপৰত দুটা ৰৈখিক স্থান। প্ৰমাণ কৰা যে $R(T)$ আৰু $N(T)$ ক্ৰমে $V(F)$ আৰু $U(F)$ৰ ৰৈখিক উপস্থান।

6. State and prove the conditions necessary for a complex function $w = f(z)$ to be analytic. Hence show that for a complex analytic function $w = u(x, y) + iv(x, y)$, if $u(x, y)$ and $v(x, y)$ possess all continuous second partial derivatives then they also satisfy the Laplace's equation. 1+4+5=10

জটিল ফলন $w = f(z)$ বৈশ্লেষিক হোৱাৰ বাবে প্ৰয়োজনীয় চৰ্তাৱলী উল্লেখ কৰা আৰু এইবোৰৰ প্ৰমাণ আগবঢ়োৱা। ইয়াৰ পৰা দেখুওৱা যে এটা জটিল বৈশ্লেষিক ফলন $w = u(x, y) + iv(x, y)$ ৰ ক্ষেত্ৰত যদি $u(x, y)$ আৰু $v(x, y)$ৰ আটাইবোৰ দ্বিতীয় আংশিক অংকলজ অবিচ্ছিন্ন হয় তেন্তে এইবোৰে লাপ্লাচ'ৰ সমীকৰণকো সিদ্ধ কৰিব।

Or/অথবা

Prove that the function $u = 2x(1-y)$ is harmonic. Find a function v such that $f(z) = u + iv$ is analytic. Also express $f(z)$ in terms of z.

প্ৰমাণ কৰা যে $u = 2x(1-y)$ ফলনটো সমঞ্জস। ফলন v নিৰ্ণয় কৰা যাতে $f(z) = u + iv$ বৈশ্লেষিক হয়। লগতে $f(z)$ক zত প্ৰকাশ কৰা।