2014

MATHEMATICS

(General)

(Classical Algebra and Trigonometry)

Full Marks : 60

Time : 2½ hours

The figures in the margin indicate full marks for the questions

Answer either *in English* or *in Assamese*

PART—I

(Objective-type questions)

1. Answer the following questions : 1×5=5

তলত দিয়া প্ৰশ্নবোৰৰ উত্তৰ কৰাঁ :

(a) If $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ are the roots of the equation

$$x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n = 0$$

then find the value of $\Sigma \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_{n-1}$.

যদি $x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n = 0$ সমীকৰণৰ মূলকেইটা $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ হয়, তেন্তে $\Sigma \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_{n-1}$ৰ মান নিৰ্ণয় কৰাঁ।

(b) If z is a non-zero complex number, then which one of the following is true?

z এটা অশূন্য জটিল সংখ্যা হ'লে, তলৰ কোনটো উক্তি সত্য ?

(i) $z\bar{z}$ is purely real

$z\bar{z}$ এটা সম্পূর্ণ বাস্তৱ

(ii) $z\bar{z}$ is purely imaginary

$z\bar{z}$ এটা সম্পূর্ণ কাল্পনিক

(iii) None of the above

ওপৰৰ এটাও নহয়

(c) Find the limit of the following sequence :

তলৰ অনুক্রমটোৰ সীমা উলিওৱাঁ :

$$\left\{\frac{2n+1}{n+1}\right\}$$

(d) Which one of the following is true?

তলৰ কোনটো সত্য ?

(i) $\cosh^2 x + \sinh^2 x = 1$

(ii) $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$

(iii) $\sinh^2 x - \cosh^2 x = 1$

(e) Write the relation among arithmetic mean, geometric mean and harmonic mean of an infinite series of real numbers.

বাস্তৱ সংখ্যাৰ অসীম শ্রেণী এটাৰ সমান্তৰ মাধ্য, গুণোত্তৰ মাধ্য আৰু হৰাত্মক মাধ্যৰ মাজৰ সম্পর্কটো লিখাঁ।

(Continued)

PART—II

(Very short answer-type questions)

2. Answer the following questions : 2×5=10

তলত দিয়া প্রশ্নবোৰৰ উত্তৰ কৰাঁ :

(a) Find the minimum value of $a+b+c$ subject to the condition $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=12$, where a, b and c assume positive real numbers.

a, b আৰু c ধনাত্মক বাস্তৱ সংখ্যা আৰু $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=12$ হ'লে, $a+b+c$ ৰ লঘিষ্ঠ মান নির্ণয় কৰাঁ।

(b) If $u_n = \frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}$, then prove that the sequence $\{u_n\}$ is bounded.

যদি $u_n = \frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}$ হয়, তেন্তে প্রমাণ কৰাঁ যে $\{u_n\}$ অনুক্রমটো পৰিবদ্ধ।

(c) Express $-1+i$ in polar form.

$-1+i$ক ধ্রুৱীয় আকাৰত প্রকাশ কৰাঁ।

(d) If $z = x+iy$, then prove that

$$|\sinh y| \le |\sin z| \le \cosh y$$

যদি $z = x+iy$ হয়, তেন্তে প্রমাণ কৰাঁ যে

$$|\sinh y| \le |\sin z| \le \cosh y$$

(Turn Over)

(e) If α, β and γ are the roots of the equation $x^3 + px + q = 0$, then find the value of $\Sigma \frac{\alpha^2}{\beta^2}$.

যদি $x^3 + px + q = 0$ সমীকৰণৰ মূলকেইটা α, β আৰু γ হয়, তেন্তে $\Sigma \frac{\alpha^2}{\beta^2}$ ৰ মান নিৰ্ণয় কৰা।

PART—III

(Short answer-type questions)

3. Answer any *three* of the following questions : 5×3=15

তলৰ যি কোনো তিনিটা প্ৰশ্নৰ উত্তৰ কৰা :

(a) If a, b and c are the positive unequal numbers such that the sum of any two of them is greater than the third, then prove that

$$abc \geq (a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)$$ 5

যদি a, b আৰু c তিনিটা ধনাত্মক অসমান সংখ্যা আৰু যি কোনো দুটাৰ যোগফল তৃতীয়টোতকৈ ডাঙৰ হয়, তেন্তে প্ৰমাণ কৰা যে

$$abc \geq (a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)$$

(b) State and prove Sandwich theorem of infinite sequence of real numbers. 1+4

বাস্তৱ সংখ্যাৰ অসীম অনুক্ৰমৰ ছেন্দউইছৰ উপপাদ্যটো লিখাঁ আৰু প্ৰমাণ কৰা।

(c) Prove that

প্ৰমাণ কৰা যে

$$(x+iy)^{\frac{m}{n}} + (x-iy)^{\frac{m}{n}} = 2(x^2+y^2)^{\frac{m}{2n}} \cos\left(\frac{m}{n}\tan^{-1}\frac{y}{x}\right)$$ 5

(d) Find the condition that the sum of two roots of the equation $x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s = 0$ is zero. 5

$x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s = 0$ সমীকৰণটোৰ দুটা মূলৰ যোগফল শূন্য হোৱাৰ চৰ্ত নিৰ্ণয় কৰা।

(e) Examine the convergence of the following series : 5

তলৰ শ্ৰেণীটোৰ অভিসাৰিতা পৰীক্ষা কৰা :

$$\frac{x}{1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{x^5}{5} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{x^7}{7} + \dots$$

PART—IV

Answer *either (a) or (b)* from each of the following questions :

তলৰ প্ৰতিটো প্ৰশ্নৰ *(a)* অথবা *(b)* ৰ উত্তৰ কৰা :

4. (a) If $\sin(u+iv) = x+iy$, then prove that

(i) $$\frac{x^2}{\cosh^2 v} + \frac{y^2}{\sinh^2 v} = 1$$

(ii) $$\frac{x^2}{\sin^2 u} - \frac{y^2}{\cos^2 u} = 1$$

and if $-\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{4}$, then prove that

$$\log\sec\theta = \frac{1}{2}\tan^2\theta - \frac{1}{4}\tan^4\theta + \frac{1}{6}\tan^6\theta - \dots$$

(3+3)+4=10

যদি $\sin(u+iv) = x+iy$ হয়, তেন্তে প্ৰমাণ কৰাঁ যে

(i) $\dfrac{x^2}{\cosh^2 v} + \dfrac{y^2}{\sinh^2 v} = 1$

(ii) $\dfrac{x^2}{\sin^2 u} - \dfrac{y^2}{\cos^2 u} = 1$

আৰু যদি $-\dfrac{\pi}{4} < \theta < \dfrac{\pi}{4}$ হয়, তেন্তে প্ৰমাণ কৰাঁ যে

$$\log\sec\theta = \frac{1}{2}\tan^2\theta - \frac{1}{4}\tan^4\theta + \frac{1}{6}\tan^6\theta - \ldots$$

(b) (i) If $x = \log\tan\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{y}{2}\right)$, then prove that

$$y = -i\log\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{ix}{2}\right)$$ 5

যদি $x = \log\tan\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{y}{2}\right)$ হয়, তেন্তে প্ৰমাণ কৰাঁ যে

$$y = -i\log\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{ix}{2}\right)$$

(ii) If $(1+m)\tan\theta = (1-m)\tan\phi$, where θ and ϕ are positive acute angles, then show that

$$\theta = \phi - m\sin 2\phi + \frac{1}{2}m^2\sin 4\phi - \frac{1}{3}m^3\sin 6\phi + \ldots$$ 5

যদি $(1+m)\tan\theta = (1-m)\tan\phi$, য'ত θ আৰু ϕ ধনাত্মক সূক্ষ্মকোণ হয়, তেন্তে দেখুওৱাঁ যে

$$\theta = \phi - m\sin 2\phi + \frac{1}{2}m^2\sin 4\phi - \frac{1}{3}m^3\sin 6\phi + \ldots$$

5. (a) (i) Prove that the arithmetic mean of n positive real numbers cannot be less than their geometric mean. 5

প্ৰমাণ কৰাঁ যে, n সংখ্যক ধনাত্মক বাস্তৱ সংখ্যাৰ সমান্তৰ মাধ্য সিহঁতৰ গুণোত্তৰ মাধ্যতকৈ সৰু হ'ব নোৱাৰে।

(ii) If a, b and c are all positive real numbers, then prove that

$$\frac{a^2+b^2}{a+b} + \frac{b^2+c^2}{b+c} + \frac{c^2+a^2}{c+a} \geq a+b+c$$ 5

যদি a, b আৰু c ধনাত্মক বাস্তৱ সংখ্যা হয়, তেন্তে প্ৰমাণ কৰা যে

$$\frac{a^2+b^2}{a+b} + \frac{b^2+c^2}{b+c} + \frac{c^2+a^2}{c+a} \geq a+b+c$$

(b) (i) Prove that the following sequence converges to a limit lying between 2 and 3 : 7

প্ৰমাণ কৰাঁ যে, তলত দিয়া অনুক্ৰমটো 2 আৰু 3 ৰ মাজৰ সংখ্যা এটাৰ্লৈ অভিসৰণ কৰে :

$$\{u_n\} = \left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$$

(ii) Examine the convergence of the following series : 3

তলৰ শ্ৰেণীটোৰ অভিসাৰিতা পৰীক্ষা কৰাঁ :

$$\frac{1}{1\cdot 2^2} + \frac{1}{2\cdot 3^2} + \frac{1}{3\cdot 4^2} + \ldots$$

6. *(a)* *(i)* Solve by Cardan's method : 6

কাৰ্ডন পদ্ধতিৰে সমাধান কৰা :

$$x^3 - 3x + 1 = 0$$

(ii) Find the equation whose roots are the reciprocals of the roots of the equation $x^3 + px^2 + qx + r = 0$. 4

$x^3 + px^2 + qx + r = 0$ সমীকৰণৰ মূলবোৰৰ প্ৰতিক্ৰমসমূহ মূল হোৱা সমীকৰণটো উলিওৱা।

(b) *(i)* Prove that every convergent sequence of real numbers is bounded, but the converse is not true. Justify with an example. 4+1

প্ৰমাণ কৰা যে, বাস্তৱ সংখ্যাৰ অভিসাৰী অনুক্ৰম এটা পৰিবদ্ধ, কিন্তু বিপৰীত উক্তিটো সত্য নহয়। উদাহৰণ দি বুজাই দিয়া।

(ii) Show that the series

$$1 + \frac{1+\alpha}{1+\beta} + \frac{(1+\alpha)(2+\alpha)}{(1+\beta)(2+\beta)} + \ldots \text{ converges,}$$

if $\beta > \alpha + 1$ and it diverges if $\beta \le \alpha + 1$. 5

দেখুওৱা যে তলৰ শ্ৰেণীটো

$$1 + \frac{1+\alpha}{1+\beta} + \frac{(1+\alpha)(2+\alpha)}{(1+\beta)(2+\beta)} + \ldots$$

অভিসাৰী, যদি $\beta > \alpha + 1$ আৰু অপসাৰী যদি $\beta \le \alpha + 1$.

★★★